

E.M.Cavadov



II HİSSƏ

Abituriyentlər üçün dərs vəsaiti

Ədədi ardıcılıq

Natural ədədlər çoxluğunda təyin olunmuş funksiya ədədi ardıcılıq deyilir. Ardıcılıqlar $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ və s. kimi işarə olunur. a_n, b_n, c_n və s. isə ardıcılığın ümumi həddi və ya n -ci həddi adlanır.

$$3;5;7;9;11;...$$

Ardıcılığı təşkil edən ədədlərə onun hədləri deyilir: $a_1; a_2; \dots; a_n$. Hədlərinin sayı sonlu olan ardıcılığa sonlu ardıcılıq deyilir. Hədlərinin sayı sonsuz olan ardıcılığa sonsuz ardıcılıq deyilir. Ardıcılığın hər bir həddi özündən qabaqkı həddən böyükdürsə, ona artan ardıcılıq, kiçikdirsə, azalan ardıcılıq deyilir. Artan və azalan (azalmayan və artmayan) ardıcılıqlara monoton ardıcılıqlar deyilir.

Bütün hədləri bərabər olan ardıcılığa sabit və ya stasionar ardıcılıq deyilir.

Nə artan, nə də azalan ardıcılığa rəqs edən ardıcılıq deyilir.

$$4;2;4;2;4;2;...$$

● Elə ardıcılıqlar var ki, həmin ardıcılığın hədləri müəyyən bir ədəddən böyük və ya kiçik olur. $a_n \leq M$ ödənilərsə, $\{a_n\}$ ardıcılığına **yuxarıdan məhdud ardıcılıq** deyilir.

-4;-8;-12;-16;-20;.... ardıcılığı yuxarıdan -4 ədədi ilə məhduddur, yəni $a_n \leq -4$

● Elə ardıcılıq var ki, $a_n \geq m$ ödənilir. Belə ardıcılığa **aşağıdan məhdud ardıcılıq** deyilir.

8;11;14;17;... ardıcılığı aşağıdan 8 ədədi ilə məhduddur.

● Həm aşağıdan, həm də yuxarıdan məhdud ardıcılığa məhdud ardıcılıq deyilir, yəni məhdud ardıcılıq

$$m \leq a_n \leq M$$

şərtini ödəyir.

Məsələn, $a_n = \cos n$ funksiyası yuxarıdan 1, aşağıdan isə -1 ədədi ilə məhduddur.

$$-1 \leq \cos n \leq 1$$

● İstənilən sabit ardıcılıq məhduddur.

Ədədi silsilə.

İkincidən başlayaraq hər bir həddi özündən qabaqkı hədlə eyni bir ədədin cəminə bərabər olan ardıcılığa ədədi silsilə deyilir. (Silsilə sözü proqressio sözündən götürülüb, mənası irəliyə hərəkət deməkdir).

2;5;8;11;14;... ardıcılığı ədədi silsilədir.

$$a_1 = 2; a_2 = 5; a_3 = 8$$

Sonrakı hədlə özündən qabaqkı həddin fərqi silsilə fərqi deyilir və d ilə işarə olunur.

$$d = a_2 - a_1 = a_{10} - a_9 = a_{100} - a_{99}$$

$$d = a_n - a_{n-1}$$

Ədədi silsilənin verilməsi üçün onun 1-ci həddini və fərqi göstərmək kifayətdir.

$d > 0$ olsa, ədədi silsiləyə artan silsilə deyilir.

$d < 0$ olsa, ədədi silsiləyə azalan silsilə deyilir.

$d = 0$ olsa, silsilə sabit ardıcılıq olur.

Ardıcılığın ədədi silsilə olduğunu göstərmək üçün onun əvvəlində $\div$ işarəsi qoyulur.

- Ədədi silsilənin istənilən həddi aşağıdakı kimi tapılır.

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

a_1 - birinci hədd,

$$a_{10} = a_1 + 9d$$

d - silsilə fərqi,

$$a_{10} = a_6 + 4d$$

n – isə hədlərin sayıdır, $n \in N$

$$a_{10} = a_8 + 2d \quad \text{və s.}$$

Misal. a) $a_1 = 5$ $d = -3$ olsa $a_{100} = a_1 + 99d = 5 + 99 \cdot (-3) = -292$.

b) $a_8 = 50$ $d = 2$ olarsa, $a_1 = ?$

$$a_8 = 50$$

$$a_1 + 7d = 50$$

$$a_1 = 50 - 7d = 50 - 7 \cdot 2 = 50 - 14 = 36$$

- Ədədi silsilənin fərqi

$$d = \frac{a_t - a_p}{t - p}$$

kimi tapılır.

Misal. $a_5 = 7$ $a_{11} = 10$ olarsa, $d = ?$; $a_{21} = ?$

Həlli

$$d = \frac{10 - 7}{11 - 5} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$a_{21} = a_{11} + 10d = 10 + 10 \cdot \frac{1}{2} = 10 + 5 = 15$$

Misal. $a_1 - a_9 = 48$ olarsa, $d = ?$

$$a_1 - a_9 = a_1 - (a_1 + 8d) = a_1 - a_1 - 8d = -8d = 48$$

$$d = -6$$

Ədədi silsilənin xassələri.

- Ədədi silsilənin hər bir həddi özündən bərabər məsafədəki hədlərin ədədi ortasına bərabərdir.

$$3;5;7;9;11;13;15;17;19;21;23;25$$

$$13 = \frac{5+21}{2}$$

$$15 = \frac{11+19}{2}$$

$$7 = \frac{5+9}{2}$$

$$a_8 = \frac{a_1 + a_{15}}{2}$$

$$a_3 = \frac{a_1 + a_5}{2}$$

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

- Ədədi silsilədə əvvəldən və sondan eyni məsafədə olan iki həddin cəmi ilk və son hədlərin cəminə bərabərdir.

$$17+11=3+25$$

$$21+7=3+25$$

- Ədədi silsilədə indekslərinin cəmi bərabər olan hədlərin cəmi bərabərdir, yəni $n+m=\ell+k$ olarsa,

$$a_n + a_m = a_\ell + a_k$$

olar.

Misal. $a_4 + a_8 = 9$ olarsa $a_7 + a_5 = ?$

$$4+8=7+5=12$$

olduğu üçün

$$a_7 + a_5 = a_4 + a_8 = 9$$

Ədədi silsilənin ilk n həddinin cəmi.

- Ədədi silsilənin ilk n həddinin cəmi

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

və ya

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

düsturu ilə tapılır.

- Ədədi silsilənin ilk n həddinin S_n cəmi verilibsə, onda onun hər hansı bir k nömrəli həddi

$$a_k = S_k - S_{k-1}$$

düsturu ilə tapılır.

Misal. 1-dən 100-ə qədər ədədlərin cəmini tapın.

$$1+2+3+4+\dots+98+99+100$$

$$a_1 = 1 \quad d = 1 \quad a_n = 100$$

$$S_n = \left(\frac{1+100}{2} \right) \cdot 100 = \frac{101}{2} \cdot 100 = 5050$$

Misal. $a_5 + a_9 = 12$ olarsa, $S_{13} = ?$

$$a_5 + a_9 = 12$$

$$a_1 + 4d + a_1 + 8d = 12$$

$$2a_1 + 12d = 12$$

$$S_{13} = \frac{2a_1 + d(13-1)}{2} \cdot 13 = \frac{2a_1 + 12d}{2} \cdot 13 = \frac{12}{2} \cdot 13 = 6 \cdot 13 = 78$$

Misal. Ədədi silsilənin ilk n həddinin cəmi $S_n = 2n^2 - 3n$ - dir. d -ni tapın.

$$a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = 2 - 3 = -1$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = (2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2) - (-1) = (8 - 6) + 1 = 3$$

$$d = a_2 - a_1 = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4$$

Misal. $a_5 + a_9 = 24$ olarsa, $a_7 = ?$

$$a_7 = \frac{a_5 + a_9}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

Həndəsi silsilə

İkincidən başlayaraq hər bir həddi özündən qabaqkı hədlə eyni bir ədədin (sıfırdan fərqli) hasilinə bərabər olan ardıcılığa həndəsi silsilə deyilir.

$$3; 6; 12; 24; 48; 96; \dots$$

$$a_1 = 3 \quad q = 6 : 3 = 2$$

q -yə silsilə vuruğu deyilir.

Həndəsi silsilənin verilməsi üçün onun 1-ci həddini və silsilə vuruğunu göstərmək kifayətdir.

Həndəsi silsilənin artan və ya azalan olması a_1 - in işarəsindən və q -dən asılıdır.

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots \text{ azalandır } \left(a_1 = 1, q = \frac{1}{2} \right)$$

$$3; 6; 12; 24; \dots \text{ artandır } (a_1 = 3, q = 2)$$

$q < 0$ olsa, həndəsi silsilə nə artan, nə də azalandır. Belə silsiləyə rəqs edən silsilə deyilir.

$q = 1$ olduqda isə sabit ardıcılıq alınır.

Ardıcılığın həndəsi silsilə olduğunu göstərmək üçün onun əvvəlində $\ddots$ işarəsi qoyulur.

- Həndəsi silsilənin istənilən həddinin düsturu aşağıdakı kimidir:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

- Həndəsi silsilədə istənilən hədd özündən eyni uzaqlıqda olan hədlərin həndəsi ortasına bərabərdir

$$3;6;12;24;48;96;\dots$$

$$12 = \sqrt{6 \cdot 24} = \sqrt{144} = 12$$

$$b_5 = \sqrt{b_4 \cdot b_6} \qquad b_7 = \sqrt{b_4 \cdot b_{10}}$$

$$b_{15} = \sqrt{b_{14} \cdot b_{16}} \qquad b_{10} = \sqrt{b_4 \cdot b_{16}}$$

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} \qquad b_n = \sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}}$$

- Həndəsi silsilədə $n + m = \ell + k$ şərti ödənilərsə

$$b_n \cdot b_m = b_\ell \cdot b_k$$

doğrudur

Məsələn, $2+6=5+3$ olarsa, $b_2 \cdot b_6 = b_5 \cdot b_3$ olur. Deməli, həndəsi silsilədə indekslərin cəmi bərabər olan hədlərin hasilı bərabərdir.

- Həndəsi silsilədə $n > m$ üçün $b_n = b_m \cdot q^{n-m}$ olur.

$$\text{Məsələn, } b_{19} = b_5 \cdot q^{14}$$

- $n > m$ olduqda (b_n) həndəsi silsilənin vuruğu üçün

$$q = \sqrt[n-m]{\frac{b_n}{b_m}}$$

doğrudur.

- Həndəsi silsilədə ilk n həddin hasilini

$$P_n = b_1 \cdot b_2 \dots b_n$$

ilə işarə etsək,

$$P_n = \sqrt{(b_1 \cdot b_n)^n}$$

düsturu doğrudur.

Misal . $b_6 = \sqrt{2}$ olarsa, ilk 11 həddin hasilini tapın

Həlli

$$P_{11} = \sqrt{(b_1 \cdot b_{11})^{11}}$$

yazmaq olar.

$$b_1 \cdot b_{11} = b_6^2$$

bərabərliyinə əsasən,

$$P_{11} = \sqrt{(b_6^2)^{11}} = \sqrt{b_6^{22}} = b_6^{11}$$

yazmaq olar. Onda

$$P_{11} = (\sqrt{2})^{11} = \sqrt{2^{11}} = \sqrt{2^{10} \cdot 2} = 2^5 \sqrt{2} = 32\sqrt{2}$$

- Həndəsi silsilənin ilk n həddinin cəmi

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, (q \neq 1) \quad \text{və ya} \quad S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}, (q \neq 1)$$

düsturu ilə tapılır.

- Sonsuz sayda həddi olan və ortaq vuruğu mütləq qiymətcə, vahiddən kiçik $|q| < 1$ olan həndəsi silsiləyə sonsuz azalan silsilə deyilir. Belə silsilənin cəmi

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

düsturu ilə tapılır.

- Həndəsi silsilədə ilk n həddin cəmi S_n məlum olsa, onda

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

düsturu doğrudur.

Misal. $3 - 2\sqrt{2}$ və $3 + 2\sqrt{2}$ ədədləri arasında hansı müsbət ədəd gəlməlidir ki, həndəsi silsilə alınsın.

$$3 - 2\sqrt{2} ; \quad x ; \quad 3 + 2\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})} = \sqrt{9 - 4 \cdot 2} = \sqrt{9 - 8} = 1$$

$5; -1; \frac{1}{5}; \frac{1}{25}; \dots$ silsiləsinin cəmini tapın.

$$b_1 = 5 \quad q = \frac{-1}{5} = -0,2 \quad |q| < 1.$$

Onda

$$S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{5}{1 - (-0,2)} = \frac{5}{1,2} = 4\frac{1}{6}$$

Misal. $b_5 = \sqrt[3]{2}$ olarsa, həndəsi silsilənin ilk 9 həddinin hasilini tapın.

$$b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot b_5 \cdot b_6 \cdot b_7 \cdot b_8 \cdot b_9 = (b_1 \cdot b_9) \cdot (b_2 \cdot b_8) \cdot (b_3 \cdot b_7) \cdot (b_4 \cdot b_6) \cdot b_5 =$$

$$= b_5^2 \cdot b_5^2 \cdot b_5^2 \cdot b_5^2 \cdot b_5 = b_5^9 = (\sqrt[3]{2})^9 = 2^3 = 8$$

Triqonometriya

“Triqonometriya” sözü yunanca triqon- üçbucaq, metriya-ölçmək deməkdir.

Bucağın radian ölçüsü

Məlum olduğu kimi, bucaqlar dərəcə, dəqiqə, saniyə və radianla ölçülür

$$1^\circ = 60' \quad 1' = 60'' \quad 1^\circ = 3600''$$

$1'$ - dəqiqə, $1''$ - saniyə

Mərkəzi bucağın söykəndiyi qövsün uzunluğu çevrənin radiusuna bərabər olarsa, belə mərkəzi bucaq bir radian adlanır və $1rad$ kimi işarə olunur.

$$1rad \approx 57^\circ 17' = 57,3^\circ$$

$$1^\circ \approx 0,017rad$$

Dərəcə ölçüsündən radian ölçüsünə keçmək üçün

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} rad$$

Radian ölçüsündən dərəcə ölçüsünə keçmək üçün

$$1rad = \frac{180^\circ}{\pi}$$

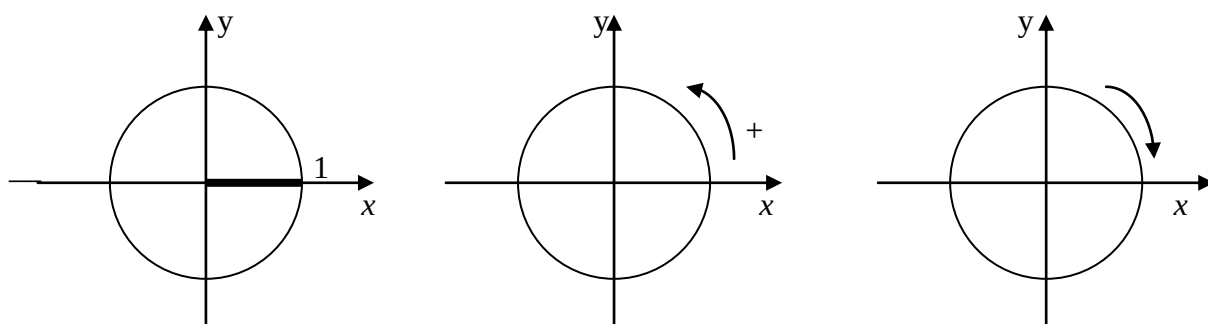
düsturundan istifadə olunur

$$45^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 45 = \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{3} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

$$30^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 30 = \frac{\pi}{6} \quad 4,5 rad = \frac{180}{\pi} \cdot 4,5 = \frac{180 \cdot 4,5}{\pi} = \frac{810}{\pi} \approx 258^\circ$$

Triqonometrik funksiyalar

Mərkəzi koordinat başlanğıcında və radiusu 1-ə bərabər olan çevrəyə vahid çevrə deyilir. Dönmə bucağı saat əqrəbi istiqamətində mənfi, saat əqrəbinin əks istiqamətində isə müsbət qəbul edilir.



Vahid çevrə üzərində $A_\alpha(x; y)$ nöqtəsi götürək. $A_\alpha(x; y)$ nöqtəsini götürmək o deməkdir ki, yəni $K(1; 0)$ nöqtəsi

koordinat başlanğıcından

α bucağı qədər dönüb. A_α nöqtəsinin

absisinə α bucağının kosinusu,

ordinatına α bucağının sinusu deyilir.

$$\cos \alpha = x \quad \sin \alpha = y$$

$A_\alpha(x; y)$ nöqtəsinin ordinatının absisinə

olan nisbəti α bucağının tangensi,

absisinin ordinatına olan nisbəti isə α bucağının kotangensi adlanır.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

Deməli,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$$

Çevrə üzərindəki A_α nöqtəsinin koordinatları

$$|x| \leq 1; |y| \leq 1 \quad \text{və} \quad x^2 + y^2 = 1$$

şərtini ödəyir. Deməli, ixtiyari α bucağı üçün

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

- Triqonometrik funksiyaların qiyməti ancaq α - dan asılıdır.

- Sinus və kosinus funksiyaları üçün

$$D(\sin) = R = (-\infty; +\infty)$$

$$E(\sin) = [-1; 1]$$

$$D(\cos) = R = (-\infty; +\infty)$$

$$E(\cos) = [-1; 1]$$

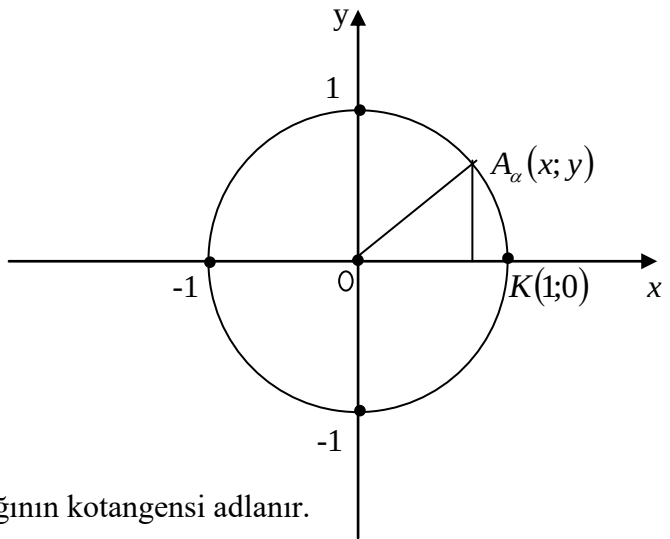
- Tangens funksiyasının təyin oblastı $\cos x \neq 0$ şərtini ödəyən $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ ədədlərdir

$$D(\operatorname{tg} x) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k \right), k \in \mathbb{Z}$$

bu aralıqda tangens artan funksiyadır.

Tangens funksiyasının qiymətlər oblastı

$$E(\operatorname{tg} x) = (-\infty; +\infty)$$



- Kotangens funksiyasının təyin oblastı $\sin x \neq 0$ şərtini ödəyən ədədlərdir, $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$$D(\operatorname{ctgx}) = (\pi k, \pi + \pi k)$$

bu aralıqda funksiya azalır.

Kotangens funksiyasının qiymətlər oblastı

$$E(\operatorname{ctgx}) = (-\infty; +\infty)$$

Ona görə də tg və ctg funksiyalarına qeyri-məhdud funksiyalar deyilir.

- Tangens və kotangens funksiyalarının ən böyük və ən kiçik qiyməti yoxdur, məhdud deyil.

- Sinus və kosinus isə məhduddur, yuxarıdan 1, aşağıdan isə -1 ədədləri ilə məhduddur.

$$\partial KQ = -1 \quad \partial BQ = 1$$

- $\sin 5000$ ifadəsinin mənası var

$$\sin x = -5 \text{ ola bilməz, çünki, } -5 \notin [-1; 1]$$

- Kosinusun tərsinə sekans deyilir.

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

- Sinusun tərsinə kosekans deyilir.

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

Triqonometrik funksiyaların qiymətləri.

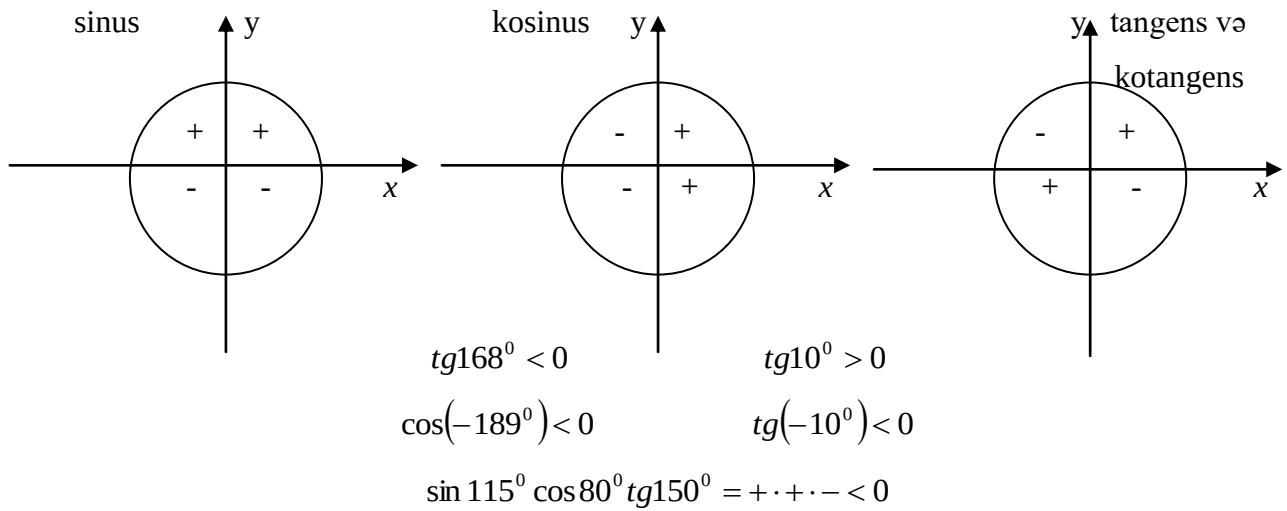
Bucaq	$0^\circ = 0 \operatorname{rad}$	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	$180^\circ = \pi$	$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$	$360^\circ = 2\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{ctg} 180^\circ = \frac{\cos 180^\circ}{\sin 180^\circ} = \frac{-1}{0} \quad \text{təyin olunmayıb}$$

$$2 \sin^2 45^\circ + 4 \cos 30^\circ = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{2}{4} + 2\sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3}$$

Triqonometrik funksiyaların işarələri.



- İti bucaq nə qədər böyük olarsa, onun sinusu da böyük olur.

$$\sin 55^\circ > \sin 54^\circ$$

$$\sin 13^\circ 56' > \sin 13^\circ 54'$$

180° - li bucaq 0° - dən böyükdür, lakin $\sin 180^\circ = \sin 0^\circ = 0$

- İti bucaq nə qədər böyük olarsa, onun kosinusu kiçik olur.

$$\cos 55^\circ < \cos 54^\circ$$

$$\cos 13^\circ 56' < \cos 13^\circ 54'$$

- Bucaq -90° -dən $+90^\circ$ - yə qədər böyüdükdə, onun tangensi $-\infty$ - dan $+\infty$ -a qədər artır.

Bucaq 0° - dən 180° -yə qədər artdıqda, onun kotangensi $+\infty$ - dan $-\infty$ -a qədər azalır.

- $(-90^\circ; 90^\circ)$ intervalında α bucağı böyükdürsə, onun tangensi də böyüyür.

$(0^\circ; 180^\circ)$ intervalında olan iki bucaqdan böyüyünə kiçik kotangens uyğundur.

Triqonometrik funksiyaların təkliyi, cütlüyü

Sinus, tangens, kotangens tək ; kosinus isə cüt funksiyadır.

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$tg(-x) = -tgx$$

$$ctg(-x) = -ctgx$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}(-45^{\circ}) = -\operatorname{tg}45^{\circ} = -\frac{\sin 45^{\circ}}{\cos 45^{\circ}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = -1$$

Triqonometrik funksiyaların dövrülüyü

Bucaq tam sayda dövr qədər dəyişdikdə sinusun, kosinusun, tangensin, kotangensin qiymətləri dəyişmir.

$$\begin{aligned}\sin 30^{\circ} &= \sin(30^{\circ} + 360^{\circ}) = \sin(30^{\circ} + 360^{\circ} \cdot 5) = \sin(30^{\circ} + 360^{\circ} \cdot 180) = \\ &= \sin(30^{\circ} - 360^{\circ} \cdot 5) = \dots = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Sinus və kosinusun ən kiçik müsbət dövrü 2π -dir.

Tangens və kotangensin ən kiçik müsbət dövrü π - dir.

$$\sin(x \pm 2\pi k) = \sin x$$

$$\cos(x \pm 2\pi k) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \pi k) = \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{ctg}(x \pm \pi k) = \operatorname{ctg} x$$

• $\sin x$ və $\cos x$ funksiyalarında argument $x > 360^{\circ}$ olarsa, 360° -yə bölüb, qalıqı götürmək lazımdır.

$$\sin 1090^{\circ} = \sin 10^{\circ}$$

$$(1090^{\circ} : 360^{\circ} = 3 \Rightarrow \text{qalıq} = 10^{\circ})$$

• $\operatorname{tg} x$ və $\operatorname{ctg} x$ funksiyalarında argument $x > 180^{\circ}$ olarsa, 180° -yə bölüb, qalıqı götürmək lazımdır.

$$\operatorname{tg} 940^{\circ} = \operatorname{tg} 40^{\circ}$$

$$(940 : 180^{\circ} = 5; \text{qalıq} = 40^{\circ})$$

Əsas triqonometrik düsturlar.

$$1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$2. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$

$$3. \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \quad \text{və ya} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

4. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ hər tərəfi $\sin^2 \alpha$ - ya bölək

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

Hər tərəfi $\cos^2 \alpha$ - ya bölək

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

Bu düsturdakı +,- işarələri α bucağının hansı rübə düşməsinə asılıdır.

Misal. $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ olarsa, $\cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha \rightarrow ?$

Şərtə görə α bucağı II rübdədir, deməli

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{13} : \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{5}{12}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{12}{5}$$

$$\text{Misal. a) } \frac{2 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{3 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha} = \frac{2 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{3(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = \frac{2 - 1}{3 \cdot 1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \cos^2 \alpha - (\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1) \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha =$$

$$= \cos^2 \alpha - 1 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\sin^2 \alpha$$

Misal. Hər hansı β bucağı üçün $\sin \beta = \frac{9}{41}$, $\cos \beta = \frac{40}{41}$ şərtləri ola bilərmi?

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

$$\left(\frac{9}{41}\right)^2 + \left(\frac{40}{41}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{81}{41^2} + \frac{1600}{41^2} = \frac{1681}{1681} = 1 \text{ ödənilir.}$$

Misal. $\operatorname{tg} \alpha = 2$ olarsa, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{ctg} \alpha \rightarrow ?$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + 4 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2}$$

Çevirmə düsturları

$90^0 \pm \alpha, 180^0 \pm \alpha, 270^0 \pm \alpha, 360^0 \pm \alpha$ şəklində bucaqların triqonometrik funksiyalarını α bucağının triqonometrik funksiyaları ilə ifadə edən düsturlara çevirmə düsturları deyilir.

- $180^0, 360^0$ - li bucaqlarda ilk funksiyanın adı olduğu kimi qalır.
- $90^0, 270^0$ -li bucaqlarda ilk funksiyanın adı oxşar adla əvəz olunur.
- α bucağını I rübdə hesab edərək, sağ tərəfin işarəsini sol tərəfə əsasən müəyyənləşdiririk.

$$a) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$b) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$c) \cos(\alpha - \pi) = \cos(-(\pi - \alpha)) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$d) \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$e) \sin^2(\pi + 5x^3) = \sin^2 5x^3$$

Toplama düsturları.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$$

İkiqat bucaq düsturları.

$$\bullet \quad \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin 40^0 = 2\sin 20^0 \cos 20^0$$

$$\sin 10^0 = 2\sin 5^0 \cos 5^0$$

$$\sin \alpha = 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$4 \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha = (2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha)^2 = (\sin 4\alpha)^2 = \sin^2 4\alpha$$

$$\bullet \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\left. \begin{aligned} \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha &\Rightarrow 2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 &\Rightarrow 2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \end{aligned} \right\}$$

Sistemə alınmış düsturlara tərtibi (dərəcəni) azaltma düsturu deyilir.

$$\cos 80^\circ = \cos^2 40^\circ - \sin^2 40^\circ$$

$$\cos 80^\circ = 1 - 2\sin^2 40^\circ$$

$$\cos 80^\circ = 2\cos^2 40^\circ - 1$$

$$\bullet \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2\operatorname{tg} \alpha} \quad \text{və ya} \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2\operatorname{ctg} \alpha}$$

Misal. $\frac{a+b}{c} = \frac{3}{4}$ olarsa, $\sin 2\alpha = ?$

Həlli

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{3}{4}$$

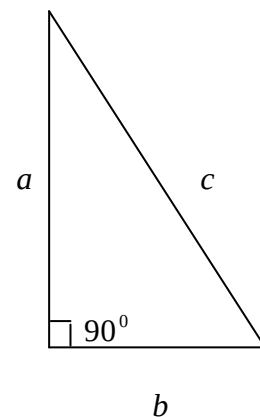
$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{9}{16}$$

$$1 + 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{9}{16}$$

$$2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{9}{16} - 1$$

$$\sin 2\alpha = -\frac{7}{16}$$



Yarımarqumentin düsturları

Bu düsturlar dərəcənin aşağı salınması düsturlarından alınır:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Triqonometrik funksiyların yarım bucağın tangensi ilə ifadəsi.

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \qquad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

Cəmin (fərqin) hasilə çevrilməsi düsturları

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{-\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

Vuruqlara ayırın:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} + 2 \cos \alpha &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \alpha \right) = 2(\cos 45^\circ + \cos \alpha) = 2 \cdot 2 \cos \frac{45^\circ + \alpha}{2} \cos \frac{45^\circ - \alpha}{2} = \\ &= 4 \cos \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2} \right) \end{aligned}$$

Hasili cəmə çevirən düsturlar

$$\left. \begin{aligned} \sin x \cdot \cos y &= \frac{\sin(x + y) + \sin(x - y)}{2} \\ \cos x \cdot \cos y &= \frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{2} \\ \sin x \cdot \sin y &= \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$$

$$\begin{aligned} \text{Misal. } \cos 36^\circ \cos 72^\circ &= \frac{2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ}{2 \sin 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ \cos 72^\circ}{2 \sin 36^\circ} = \frac{2 \sin 72^\circ \cos 72^\circ}{4 \sin 36^\circ} = \\ &= \frac{\sin 144^\circ}{4 \sin 36^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 36^\circ)}{4 \sin 36^\circ} = \frac{\sin 36^\circ}{4 \sin 36^\circ} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Üçqat bucağın düsturları.

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha + \\ &+ (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + (1 - \sin^2 \alpha) \sin \alpha - \sin^3 \alpha = 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \alpha - \\ &- \sin^3 \alpha - \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Köməkçi arqument daxil etməklə çevirmələr.

$$a \sin \varphi \pm b \cos \varphi = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\varphi \pm \alpha), \text{ burada } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

$$b \cos \varphi \pm a \sin \varphi = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\varphi \mp \alpha), \text{ burada } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$$

$a \sin \varphi \pm b \cos \varphi$ ifadəsinin

$$\partial KQ = -\sqrt{a^2 + b^2} \quad \partial BQ = \sqrt{a^2 + b^2},$$

qiymətlər oblastı isə $\left[-\sqrt{a^2 + b^2}; \sqrt{a^2 + b^2}\right]$ olur.

Tərs triqonometrik funksiyalar.

$y = \arcsin x$. Sinus funksiyasının tərs funksiyasına arksinus deyilir. a ədədinin arksinusu -

$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ parçasından götürülən və sinusu a -ya bərabər olan ədədə deyilir.

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \text{ çünki } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ və } \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Bu funksiyanın aşağıdakı xassələri vardır.

- Bu funksiyanın təyin oblastı $[-1; 1]$ parçasıdır. $D(\arcsin x) = [-1; 1]$
- Bu funksiya $[-1; 1]$ parçasında artır.
- Qiymətlər oblastı $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ -dir.

$$E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

- Funksiya tək funksiya

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

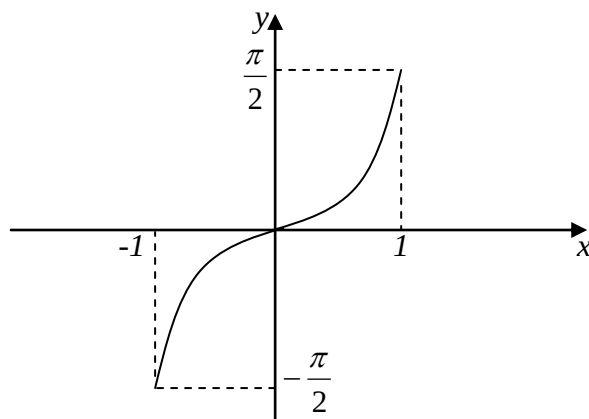
$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$$

Misal. $y = \arcsin \frac{2x-1}{3}$ funksiyasının təyin oblastını tapın.

$$-1 \leq \frac{2x-1}{3} \leq 1$$

$$-3 \leq 2x-1 \leq 3$$

$$-2 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow -1 \leq x \leq 2 \Rightarrow [-1; 2]$$



$y = \arccos x$. Kosinus funksiyanın tərs funksiyanı arkkosinus deyilir. a ədədinin arkkosinusu - $[0; \pi]$ parçasından götürülən və kosinusu a -ya bərabər olan ədədə deyilir.

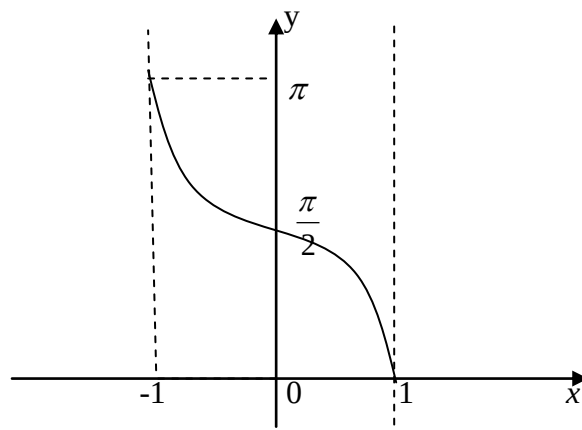
$$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}, \text{ çünki } \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ və } \frac{\pi}{6} \in [0; \pi]$$

- $D(\arccos x) = [-1; 1]$
- $E(\arccos x) = [0; \pi]$
- Funksiya $[-1; 1]$ parçasında azalır.
- Bu funksiya nə tək, nə də cütdür.

Bu funksiya üçün $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

- $\arccos(-4)$; $\arccos \frac{28}{4}$ mənasızdır, çünki -4 ; $\frac{28}{4} \notin [-1; 1]$
- $\arccos x = -30^\circ$ ola bilməz, çünki $-30 \notin [0; \pi]$



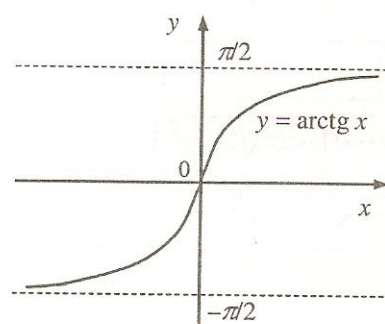
$y = \arctg x$. Tangens funksiyanın tərs funksiyanı arktangens deyilir. a ədədinin arktangensi - $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ aralığından götürülən və tangensi a -ya bərabər olan ədədə deyilir.

$$\arctg 1 = \frac{\pi}{4}, \text{ çünki } \tg \frac{\pi}{4} = 1 \text{ və } \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

- $D(\arctg x) = (-\infty; +\infty)$
- $E(\arctg x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
- Bu funksiya $(-\infty; +\infty)$ -da monoton artır.
- Bu funksiya tək funksiya.

$$\arctg(-x) = -\arctg x$$

$$\arctg(-1) = -\arctg 1 = -\frac{\pi}{4}$$



$y = \operatorname{arccotg} x$. Kotangens funksiyanın tərs funksiyanı arkkotangens deyilir. a ədədinin arkkotangensi - $(0; \pi)$ aralığından götürülən və kotangensi a -ya bərabər olan ədədə deyilir.

$$\operatorname{arccctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \text{ çünk} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1 \text{ və } \frac{\pi}{4} \in (0; \pi)$$

- $D(\operatorname{arccctg} x) = (-\infty; +\infty)$

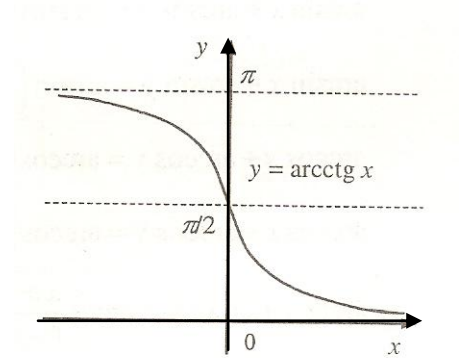
- $E(\operatorname{arccctg} x) = (0; \pi)$

- Bu funksiya $(-\infty; +\infty)$ - da azalır.

- Bu funksiya nə tək, nə də cüt funksiya.

$$\operatorname{arccctg}(-x) = \pi - \operatorname{arccctg} x$$

$$\operatorname{arccctg}(-1) = \pi - \operatorname{arccctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$



- x -in bu funksiyaları mənalı edən qiymətlərində aşağıdakı eyniliklər doğrudur.

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctg x + \operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Misal. $y = 3 - 2\arctg x$ funksiyasının qiymətlər oblastını tapın.

$$-\frac{\pi}{2} < \arctg x < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \cdot (-2) > -2\arctg x > -\frac{\pi}{2} \cdot 2$$

$$\pi > -2\arctg x > -\pi$$

$$-\pi < -2\arctg x < \pi$$

$$-\pi + 3 < 3 - 2\arctg x < \pi + 3 \quad \text{Cavab: } (3 - \pi; 3 + \pi)$$

Misal. Müqayisə edin: $\arcsin 0,6$ və $\arcsin 0,3$

$\arcsin x$ artan funksiya olduğu üçün $\arcsin 0,6 > \arcsin 0,3$

Misal. Sadələşdirin.

$$a) \sin\left(4 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \sin\left(4 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin(-\pi) = 0$$

$$b) \sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \sin\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} =$$

$$= \sin 135^\circ = \sin(90^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c) \cos\left(6 \cdot \arccos \frac{1}{2}\right) = \cos\left(6 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2\pi = 1$$

$$ç) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \operatorname{arcctg} \sqrt{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Tərs triqonometrik eyniliklər

$\sin(\arcsin x) = x$ $\cos(\arccos x) = x$ $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$
$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$

$\arcsin(\sin x) = x$ $\arccos(\cos x) = x$ $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$
$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$

$$\sin\left(\frac{1}{2} \arcsin x\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})$$

$$\cos\left(\frac{1}{2} \arcsin x\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$$

$$\cos\left(\frac{1}{2} \arccos x\right) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{1}{2} \arccos x\right) = \sqrt{\frac{1-x}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \arccos x\right) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$\sin(2 \arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

$$\cos(2 \arccos x) = 2x^2 - 1$$

$$\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} x) = \frac{2x}{1-x^2}$$

$$\sin(2 \operatorname{arctg} x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\cos(2 \operatorname{arctg} x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\operatorname{tg}(2 \arccos x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{2x^2-1}$$

$$\operatorname{tg}(2 \arcsin x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$$

$$\sin(4 \operatorname{arctg} x) = \frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

Misallar:

$$a) \sin(2 \arcsin x) = 2 \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

$$b) \sin\left(2 \arcsin \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{3} \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{9} \sqrt{2}$$

$$c) \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

$$\begin{aligned} \zeta) \cos\left(\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \cos(\operatorname{arctg} \sqrt{3}) \cos\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sin(\operatorname{arctg} \sqrt{3}) \sin\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} \sqrt{1-\frac{3}{4}} = 0 \end{aligned}$$

Tənlikləri həll edin

$$a) \arccos \frac{1+2x}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ hər tərəfdən kosinus alaı, onda}$$

$$\cos\left(\arccos \frac{1+2x}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{1+2x}{3} = \cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

- Əgər $x > 0$ olarsa

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

- Əgər, $x < 0$ olarsa

$$\operatorname{arctg} x = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

- Əgər, $x < 0$ olarsa

$$\operatorname{arctg} x = \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

- Əgər, $x > 0$ olarsa

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

- Əgər, $x < 0$ olarsa

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \text{ olur.}$$

$$2 + 4x = -3 \Rightarrow x = -1,25$$

$$\text{b) } 5 \arcsin^2 x + 9 \arcsin x - 2 = 0 \quad \arcsin x = t \text{ olsun}$$

$$5t^2 + 9t - 2 = 0 \quad \arcsin x = -2 \quad \text{və ya} \quad \arcsin x = \frac{1}{5}$$

$$t_1 = -2; \quad t_2 = \frac{1}{5} \quad D(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \quad \sin(\arcsin x) = \sin \frac{1}{5}$$

$$2 \text{ rad} \approx 2 \cdot 57,3 = 114,6 \quad x = \sin \frac{1}{5}$$

$$114,6 \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\text{Cavab: } \sin \frac{1}{5}$$

Hesablayın:

$$\text{a) } \arccos\left(\cos \frac{5\pi}{8}\right) = \frac{5\pi}{8}, \text{ çünki, } 0 < \frac{5\pi}{8} < \pi$$

$$\text{b) } \arcsin\left(\sin \frac{9\pi}{7}\right) = \arcsin\left(\sin\left(\pi + \frac{2\pi}{7}\right)\right) = \arcsin\left(-\sin \frac{2\pi}{7}\right) = -\frac{2\pi}{7}$$

$$\text{c) } \arccos\left(\cos \frac{7\pi}{5}\right) = \arccos\left(\cos\left(\pi + \frac{2\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(-\cos \frac{2\pi}{5}\right) = \pi - \frac{2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$$

$$\text{ç) } \arcsin(\sin 2) = \arcsin(\sin(\pi - 2)) = \pi - 2, \text{ çünki } -\frac{\pi}{2} < \pi - 2 < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{d) } \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 5) = 5, \text{ çünki } 5 \text{ təyin oblasta daxildir, } 5 \in R$$

$$\text{e) } \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 6) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(6 - 2\pi)) = 6 - 2\pi, \text{ çünki, } -\frac{\pi}{2} < 6 - 2\pi < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{f) } \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 12) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2} - 12\right)\right) = \frac{7\pi}{2} - 12$$

$$\text{q) } \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{8\pi}{5}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\pi + \frac{3\pi}{5}\right)\right) = \frac{3\pi}{5}$$

Triqonometrik tənliklər

Məchulu triqonometrik funksiya işarəsi altında olan tənliyə triqonometrik tənlik deyilir.

$\sin x = a$ tənliyi. Əgər a ədədi $[-1;1]$ parçasına aid deyilsə, onda tənliyin kökü yoxdur, çünki, $E(\sin x) = [-1;1]$

- $a = 0$ olduqda $x = \pi k, k \in Z$
- $a = 1$ olduqda $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$
- $a = -1$ olduqda $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

Ümumi halda $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z$

$$\text{a) } \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\text{b) } \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = -(-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in Z$$

$$2x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi k$$

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$$

$\cos x = a$ tənliyi. Əgər, burada a ədədi $[-1;1]$ parçasına aid deyilsə, onda tənliyin kökü yoxdur.

- $a = 0$ olsa $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$
- $a = 1$ olsa $x = 2\pi k, k \in Z$
- $a = -1$ olsa $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$

Ümumi hal üçün

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k$$

$$2x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pm \left(\pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{8} \pm \frac{5\pi}{12} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\operatorname{tg} x = a$ tənliyi. Bu tənliyin a -nın istənilən qiymətində həlli vardır.

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\operatorname{ctg} x = a$ tənliyi. Bu tənliyin a -nın istənilən qiymətində həlli vardır.

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

a) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$

b) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$

$$x = \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \pi k$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\sqrt{3}$$

$$x = \pi - \operatorname{arcctg} \sqrt{3} + \pi k$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Trigonometrik tənliklərin həlli üsulları.

1. Əvəzləmə üsulu.

$6\cos^2 x - 5\cos x + 1 = 0$, burada $\cos x = t$ əvəzləməsi qəbul edək. Onda

$$6t^2 - 5t + 1 = 0 \Rightarrow D = 25 - 24 = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2} \quad \text{və ya} \quad t_2 = \frac{1}{3}$$

əvəzləmədə nəzərə alaq. Onda, $\cos x = \frac{1}{2}$ və ya $\cos x = \frac{1}{3}$ alınar.

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \text{və ya} \quad x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2. Vuruqlara ayırma üsulu.

$$\sqrt{2} \cos^2 4x = \cos 4x \Rightarrow \sqrt{2} \cos^2 4x - \cos 4x = 0 \Rightarrow \cos 4x (\sqrt{2} \cos 4x - 1) = 0$$

$$\cos 4x = 0 \quad \text{və ya} \quad \sqrt{2} \cos 4x - 1 = 0$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \sqrt{2} \cos 4x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} \quad \cos 4x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 4x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

3. Bircinsli tənliklər. Belə tənliklərin hər tərəfi sinus və kosinusun tənliyin dərəcəsinə bərabər qüvvətinə bölməklə həll olunur.

$$3\sin^2 x - 4\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$$

bu tənlikdə $\cos x = 0$ ola bilməz, çünki, $\cos x$ sıfır olsa, onda sinus da sıfır olardı. Bu isə $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ eyniliyinə ziddir. Ona görə də bu tənliyin hər iki tərəfini $\cos^2 x$ -ə bölmək olar.

$$3\tg^2 x - 4\tg x + 1 = 0, \text{ burada } \tg x = t \text{ qəbul edək. Onda}$$

$$3t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow D_1 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow t_1 = 1 \quad \text{və ya} \quad t_2 = \frac{1}{3} \quad \text{Onda } \tg x = 1 \quad \text{və ya} \quad \tg x = \frac{1}{3}.$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad x_2 = \arctg \frac{1}{3} + \pi k$$

4. Köməkçi bucaq daxil etməklə həll olunan tənliklər.

Bu üsulla $a\sin x + b\cos x = c$ tipli tənliklər həll olunur. Bunun üçün tənliyin hər iki tərəfini $\sqrt{a^2 + b^2}$ - na bölmək lazımdır.

$$a) \sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2 \text{ hər tərəfi 2-yə bölək}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} \sin x + \sin \frac{\pi}{6} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x + \frac{\pi}{6} = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$b) 3\sin x + 4\cos x = 5 \text{ hər tərəfi } \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ - ə bölək.}$$

$$\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{5} = \cos \varphi \\ \frac{4}{5} = \sin \varphi \end{array} \right\} \text{ əvəzləməsi qəbul edək. Onda } \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} \Rightarrow \tg \varphi = \frac{4}{3}, \quad \varphi = \arctg \frac{4}{3}$$

Beləliklə

$$\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x = 1$$

$$\sin(x + \varphi) = 1$$

$$x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \varphi + 2\pi k = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{4}{3} + 2\pi k$$

və ya cavabı belə də yazmaq olar.

$$x = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{4}{5} + 2\pi k, \quad k \in Z$$

5. Universal əvəzləmə ilə həll olunan tənliklər. Bu üsulla tənlikləri həll etmək üçün aşağıdakı düsturlar tətbiq olunur:

$$\sin \alpha = \frac{2tg \frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2 \frac{\alpha}{2}} \qquad tg \alpha = \frac{2tg \frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - tg^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2 \frac{\alpha}{2}} \qquad ctg \alpha = \frac{1 - tg^2 \frac{\alpha}{2}}{2tg \frac{\alpha}{2}}$$

Misal. $2\sin x - 9\cos x = 7$

$$2 \cdot \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} - 9 \cdot \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = 7, \text{ burada } tg \frac{x}{2} = t \text{ olsun, onda}$$

$$\frac{4t}{1 + t^2} - \frac{9(1 - t^2)}{1 + t^2} = 7 \text{ həll olunur və əvəzləmədə nəzərə alınır.}$$

6. Cəmin hasilə və hasilin cəmə çevirmə düsturları ilə həll olunan tənliklər.

a) $\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0$

$$\cos 3x - 2\cos 3x \sin x = 0$$

$$\cos 3x(1 - 2\sin x) = 0$$

$$\cos 3x = 0 \quad 1 - 2\sin x = 0$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad 2\sin x = 1$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$$

b) $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$

$$\frac{\cos 6x - \cos 8x}{2} = \frac{\cos 2x - \cos 8x}{2}$$

$$\cos 6x - \cos 8x = \cos 2x - \cos 8x$$

$$\cos 6x - \cos 2x = 0$$

$$-2\sin 4x \sin 2x = 0$$

$$\sin 4x = 0 \text{ və ya } \sin 2x = 0$$

$$4x = \pi k \quad 2x = \pi k$$

$$x = \frac{\pi k}{4} \quad x = \frac{\pi k}{2}$$

$$\text{Cavab: } \frac{\pi k}{4}, k \in Z, \text{ çünki } \frac{\pi k}{2} \in \frac{\pi k}{4}$$

$$\text{Qeyd: } \frac{\pi k}{4} \rightarrow 0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi; \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{\pi k}{2} \rightarrow 0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$$

$$\text{Aydındır ki, } \frac{\pi k}{2} \in \frac{\pi k}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

7. Dərəcəni aşağı salmaqla həll olunan tənliklər.

Bu məqsədlə $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ düsturlarından istifadə olunur.

$$\cos^2 3x = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1 + \cos 6x}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4 + 4\cos 6x = 2 \Rightarrow \cos 6x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 6x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k \Rightarrow 6x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos 3x = \frac{1}{2} \\ \cos 3x = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \text{Qeyd edək ki, verilmiş tənliyi kvadrat tənlik kimi də həll etmək olar. Onda}$$

tənliklərini həll etmək və həllər çoxluqlarını birləşdirmək lazımdır. Lakin bu, çoxluqların ortaq elementləri olduğundan, $\cos^2 3x = \frac{1}{4}$ tənliyinin həllər çoxluqlarını belə birləşmə ilə almaq müəyyən çətinliklər yaradır. Ona görə də belə tənlikləri dərəcəni azaltmaqla həll etmək əlverişlidir.

$$\sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 3x = 1,5$$

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = 1,5$$

$$1 - \cos 2x + 1 + \cos 4x + 1 - \cos 6x = 3$$

$$\cos 4x - \cos 2x - \cos 6x = 0$$

$$\cos 4x - (\cos 2x + \cos 6x) = 0$$

$$\cos 4x - 2\cos 4x \cos 2x = 0$$

$$\cos 4x(1 - 2\cos 2x) = 0$$

$$\cos 4x = 0$$

$$1 - 2\cos 2x = 0$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

8) Triqonometrik ifadələri qiymətləndirmək üsulu. Bəzi triqonometrik tənlikləri tənliyə daxil olan triqonometrik ifadələri qiymətləndirməklə də həll etmək olar.

$$\sin 2x + 2 \cos 8x = 3$$

Göstərmək olar ki, verilmiş tənliyin yalnız $\sin 2x = 1$ və $\cos 8x = 1$ olduqda həlli var. Deməli, $\sin 2x = 1$ və $\cos 8x = 1$ tənliklərini həll etmək lazımdır. Bu tənliklərin həlləri isə $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ və $x = \frac{\pi k}{4}$. Aydın ki, $\cos 8x = 1$ tənliyinin həlli olan $x = \frac{\pi k}{4}$, həm də $\sin 2x = 1$ tənliyini ödəməlidir. Ona görə, müəyyən k və n -lər üçün

$$\frac{\pi}{4} + \pi n = \frac{\pi k}{4}, \quad k \in Z$$

Buradan $k = 4n + 1$ alırıq. Yəni, $k = 4n + 1$ şəklində olarsa, $\frac{\pi}{4} + \pi n$ və $\frac{\pi k}{4}$ çoxluqları eyni çoxluqlar olar. Beləliklə, $\sin 2x + 2 \cos 8x = 3$ tənliyinin həlləri $\frac{\pi}{4}(4n + 1)$, $n \in Z$ şəklindədir.

9. $\sin \alpha = \sin \beta$, $\cos \alpha = \cos \beta$, $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$, $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$ tipli tənliklər.

- $\sin \alpha = \sin \beta$ olduqda, bu münasibət $\alpha = (-1)^k \beta + \pi k$, $k \in Z$
- $\cos \alpha = \cos \beta$ olduqda, $\alpha = \pm \beta + 2\pi k$, $k \in Z$
- $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$ olduqda, $\alpha = \beta + \pi k$, $k \in Z$; $\alpha, \beta \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$
- $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$ olduqda, $\alpha = \beta + \pi k$, $k \in Z$; $\alpha, \beta \neq \pi k$

Misal. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ tənliyini həll edək.

Tənlikdə $\alpha = 2x - \frac{\pi}{3}$, $\beta = x + \frac{\pi}{6}$ qəbul edək.

Yuxarıda verilən münasibətə görə

$$2x - \frac{\pi}{3} = \pm \left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k, \quad k \in Z$$

Buradan isə

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z \quad \text{və} \quad x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in Z \quad \text{alırıq.}$$

- **Qeyd:** Aşağıdakı tərs triqonometrik tənlikləri həll edin.

a) $4 \arccos \frac{x}{2} = 3\pi$

b) $3 \arctg(2 - x) = 2\pi$

$$\arccos \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\arctg(2-x) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\left(\arccos \frac{x}{2}\right) = \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \arctgt < \frac{\pi}{2} \text{ olduğundan, verilmiş}$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

tənliyin kökü yoxdur.

$$x = -\sqrt{2}$$

$$\text{ç) } \arcsin(x^2 - 4) - \arcsin(2x + 4) = 0$$

$$\arcsin(x^2 - 4) = \arcsin(2x + 4)$$

$$\text{Dəyişənin mümkün qiymətləri } \begin{cases} -1 \leq x^2 - 4 \leq 1 \\ -1 \leq 2x + 4 \leq 1 \end{cases}$$

$$x^2 - 4 = 2x + 4$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 4 \text{ (kənar kökdür, ödəmir)}$$

● *Tənlikləri həll edin.*

$$\text{a) } \text{ctgx}(1 - \cos 2x) = 0$$

$$\begin{cases} \text{ctgx} = 0 \\ 1 - \cos 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\cos x}{\sin x} = 0 \\ 1 - \cos 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \neq 0 \\ 1 - \cos 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \neq 0 \\ 2 \sin^2 x = 0 \end{cases} \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Cavab: } \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) } \frac{\text{tg}x}{\sin 3x} = 0 \text{ həll edin.}$$

$$\begin{cases} \text{tg}x = 0 \\ \sin 3x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \\ \sin 3x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \\ \sin 3x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Göründüyü kimi, $n = 3k$ olarsa, $x = \pi k$ alınır ki, bu da $\sin x = 0$ tənliyinin bütün həllərinin məxrəci sıfıra çevirdiyini göstərir. Deməli, tənliyin kökü yoxdur.

$$\text{ç) } \frac{\sin 3x}{\sin x} = 0 \text{ tənliyini həll edin.}$$

$$\begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{3}, & n \in Z \\ x \neq \pi k, & k \in Z \end{cases} \Rightarrow n \neq 3k$$

və ya

$$n = 3k \pm 1 \Rightarrow x = \frac{\pi n}{3} = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1) = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in Z$$

d) $(1 + \operatorname{tg} x) \cos x = 0$ tənliyini həll edin.

$\operatorname{tg} x$ -in təyin olunması üçün $\cos x \neq 0$ olmalıdır. Deməli,

$$1 + \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z$$

e) $\operatorname{tg} x(1 + \cos 2x) = 0$ tənliyini həll edin.

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \\ 1 + \cos 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x \neq 0 \\ 1 + \cos 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x \neq 0 \\ 2 \cos^2 x = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k, \quad k \in Z$$

Cavab: $x = \pi k, \quad k \in Z$

ə) $\sin^2 5x + 1 = \cos^2 3x$ tənliyini həll edin.

$\sin^2 5x + 1 - \cos^2 3x = 0 \Rightarrow \sin^2 5x + \sin^2 3x = 0$. Sol tərəfdəki toplananların heç biri mənfi olmadığından, $\sin^2 5x = 0$ və $\sin^2 3x = 0$ olmalıdır. 1-ci tənliyin həlli $x = \frac{\pi k}{5}$, 2-ci

tənliyin həlli isə $x = \frac{\pi n}{3}$ olur. Lakin, eyni zamanda həm $\sin^2 5x = 0$, həm də $\sin^2 3x = 0$ olması

üçün $\frac{\pi k}{5} = \frac{\pi n}{3}$ olmalıdır. Buradan alırıq ki, $3k = 5n$ və deməli, $k = 5m$, $n = 3m$, $m \in Z$

olmalıdır. Deməli, verilmiş tənliyin həlli $x = \pi m$, $m \in Z$

f) $2^{\cos x} = \cos x + \frac{1}{\cos x}$ tənliyini həll edin.

$|\cos x| \leq 1$ olduğundan tənliyin sol tərəfi 2-dən böyük deyil, yəni $2^{\cos x} \leq 2$ və $\cos x = 1$ olduqda $2^{\cos x} = 2$ olar. Tənliyin sol tərəfi yalnız müsbət qiymət alır, çünki $2^{\cos x} > 0$, ona görə sağ tərəfdə müsbət olmalıdır, buradan alınır ki, $\cos x > 0$. Deməli, $\cos x + \frac{1}{\cos x} \geq 2$. Bərabərlik

halı yalnız $\cos x = 1$ olduqda doğrudur. Onda $x = 2\pi k$, $k \in Z$

k) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$ tənliyini həll edin.

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\sin^3 x - \sin^2 x + \cos^3 x - \cos^2 x = 0$$

$$\sin^2 x - \sin^3 x + \cos^2 x - \cos^3 x = 0$$

$$\sin^2 x(1 - \sin x) + \cos^2 x(1 - \cos x) = 0$$

$$(1 - \cos^2 x)(1 - \sin x) + (1 - \sin^2 x)(1 - \cos x) = 0$$

$$(1 - \sin x)(1 - \cos x)(\sin x + \cos x + 2) = 0$$

$$1 - \sin x = 0$$

$$1 - \cos x = 0$$

$$\sin x + \cos x + 2 = 0$$

$$\sin x = 1$$

$$\cos x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -2$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x = 2\pi k$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}}, \quad \emptyset \text{ həlli yoxdur.}$$

$$\text{Cavab: } \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{h) } 5 \arcsin^2 x + 9 \arcsin x - 2 = 0 \text{ tənliyini həll edin.}$$

$$\arcsin x = t \text{ olsun.}$$

$$5t^2 + 9t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{5} \text{ və } t_2 = -2$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \text{ olduğundan } \arcsin x = -2 \text{ tənliyinin həlli yoxdur.}$$

$$\arcsin x = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \sin \frac{1}{5}.$$

$$\text{Cavab: } x = \sin \frac{1}{5}$$

Triqonometrik tənliklər sisteminin həlli

$$\bullet \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2} \\ \cos x + \cos y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + y$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + \cos y = 1$$

$$\cos y - \sin y = 1 \quad \text{hər tərəfi } \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ -yə bölək}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos y - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos y - \sin \frac{\pi}{4} \sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + y\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} + y = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow y = \pm \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k \text{ Buradan}$$

$$y_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k = 2\pi k$$

$$y_2 = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\text{Onda, } x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; x_2 = \frac{\pi}{2} + (-\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = 2\pi k$$

$$\text{Cavab: } (\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi k) \text{ v} \text{ } (2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$$

$$\bullet \begin{cases} \cos(x+y)=0 \\ \cos(x-y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x-y = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \Rightarrow 2x = \pi + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\text{Onda, } y = \frac{\pi}{2} + \pi k - \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$$

$$\text{Cavab: } \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0\right)$$

$$\bullet \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \sin^2 x - \cos^2 y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ (\sin x - \cos y)(\sin x + \cos y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \sin x - \cos y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sin x = 2 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

$$\text{Onda } \cos y = 1 - \sin x \Rightarrow \cos y = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \Rightarrow \cos y = 1 - \cos 2\pi k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos y = 1 - 1 \Rightarrow \cos y = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\text{Cavab: } \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \begin{cases} 4(x+y) = \pi \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{4} \\ \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 2y}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{4} \\ \cos 2x + \cos 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{4} \\ 2\cos(x+y)\cos(x-y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{4} \\ \cos(x-y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{4} \\ x-y = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi k}{2} \\ y = -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Triqonometrik bərabərsizliklər.

Məchulu triqonometrik funksiya işarəsi altında olan bərabərsizliklərə triqonometrik bərabərsizliklər deyilir.

Bu bərabərsizliklər aşağıdakı kimi həll olunur.

Bərabərsizliklər	Həlləri
$\sin x > a$ $\sin x < a$ $\cos x > a$ $\cos x < a$ $tgx > a$ $tgx < a$ $ctgx > a$ $ctgx < a$	$\arcsin a + 2\pi k < x < \pi - \arcsin a + 2\pi k$ $-\pi - \arcsin a + 2\pi k < x < \arcsin a + 2\pi k$ $-\arccos a + 2\pi k < x < \arccos a + 2\pi k$ $\arccos a + 2\pi k < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi k$ $\arctg a + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$ $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \arctg a + \pi k$ $\pi k < x < \operatorname{arcctg} a + \pi k$ $\operatorname{arcctg} a + \pi k < x < \pi + \pi k$

$\leq, \geq$ işarələri olanda tg və ctg –də yalnız arc olan ucu alır, çünki $tg90^\circ$ –də, ctg isə πk - da təyin olunmayıb.

Aşağıdakı xüsusi hallara baxaq

- $\sin x > a$ bərabərsizliyində

a) $a < -1$ olarsa, bərabərsizliyin həlli istənilən həqiqi ədəddir

b) $a = -1$ olarsa, $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$

c) $a > 1$ olarsa, bərabərsizliyin həlli yoxdur

- $\sin x < a$ bərabərsizliyində

a) $a \leq -1$ olarsa, bərabərsizliyin həlli yoxdur

b) $a = 1$ olarsa, $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$

c) $a > 1$ olarsa, bərabərsizliyin həlli istənilən həqiqi ədəddir

- $\cos x > a$ bərabərsizliyində

a) $a < -1$ olarsa, bərabərsizliyin həlli istənilən həqiqi ədəddir

b) $a = -1$ olarsa, $x \neq \pi + 2\pi k$

c) $a > 1$ olarsa, bərabərsizliyin həlli yoxdur

- $\cos x < a$ bərabərsizliyində

a) $a < -1$ olarsa, həlli yoxdur

b) $a > 1$ olsa, bərabərsizliyin həlli istənilən həqiqi ədəddir

c) $a = 1$ olarsa, $x \neq 2\pi k$ olur

Misallar. a) $2\sin 2x - \sqrt{3} \leq 0$

$$2\sin 2x \leq \sqrt{3}$$

$$\sin 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\pi - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k \leq 2x \leq \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k$$

$$-\pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq 2x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$-\frac{4\pi}{3} + 2\pi k \leq 2x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$-\frac{2\pi}{3} + \pi k \leq x \leq \frac{\pi}{6} + \pi k \quad \text{və ya} \quad \left[-\frac{2\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right], \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 > 0 \quad \sin x = t \text{ olsun}$

$$2t^2 - 7t + 3 > 0$$

$$D = 25$$

$$t_1 = 3, \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

$$t < \frac{1}{2} \quad \text{və ya} \quad t > 3$$

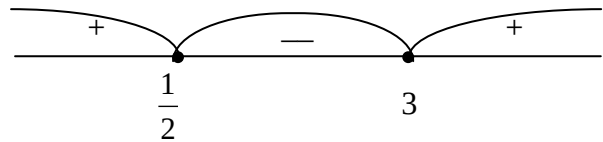
$$\sin x < \frac{1}{2} \quad \text{və ya} \quad \sin x > 3$$

$$[-1; 1] > 3 \quad \text{ola bilməz, } \emptyset$$

$$-\pi - \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi k < x < \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi k$$

$$-\pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$



**Tərs triqonometrik funksiyalar daxil olan
bərabərsizliklərin həlli.**

- $\arcsin x > \alpha \Rightarrow \sin \alpha < x \leq 1$
- $\arcsin x < \alpha \Rightarrow x \in [-1; \sin \alpha)$
- $\arccos x > \alpha \Rightarrow x \in [-1; \cos \alpha)$
- $\arccos x < \alpha \Rightarrow x \in (\cos \alpha; 1]$
- $\operatorname{arctg} x > \alpha \Rightarrow x \in (\operatorname{tg} \alpha; +\infty)$
- $\operatorname{arctg} x < \alpha \Rightarrow x \in (-\infty; \operatorname{tg} \alpha)$
- $\operatorname{arcctg} x > \alpha \Rightarrow x \in (-\infty; \operatorname{ctg} \alpha)$
- $\operatorname{arcctg} x < \alpha \Rightarrow x \in (\operatorname{ctg} \alpha; +\infty)$

Misal:

a) $\operatorname{arctg}(2x-1) > \frac{\pi}{4}$

$$\operatorname{tg} \alpha < x < +\infty$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} < 2x-1 < +\infty$$

$$1 < 2x-1 < +\infty$$

$$2 < 2x < +\infty$$

$$1 < x < +\infty \Rightarrow (1; +\infty)$$

b) $6 \arcsin(x+1) > \pi$

$$\arcsin(x+1) > \frac{\pi}{6}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} < x+1 \leq 1$$

$$\frac{1}{2} < x+1 \leq 1$$

$$\frac{1}{2} - 1 < x \leq 1 - 1$$

$$-\frac{1}{2} < x \leq 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}; 0\right]$$

c) $4 \arccos(x-1) > 3\pi$

$$\arccos(x-1) > \frac{3\pi}{4}$$

$$-1 \leq x-1 < \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$-1 \leq x-1 < -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-1+1 \leq x < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 \leq x < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left[0; 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

d) $4 \operatorname{arctg}(2x-1) > \pi$

$$\operatorname{arctg}(2x-1) > \frac{\pi}{4}$$

Aydındır.

$$j) \arccos(3x+1) - \arccos(5x+2) > 0$$

$\arccos x$ funksiyası azalan

funksiyadır. Ona görə

$$\begin{cases} 3x+1 < 5x+2 \\ -1 \leq 3x+1 \leq 1 \Rightarrow \\ -1 \leq 5x+2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{5}\right]$$

$$e) 6 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} > \pi$$

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{2} > \frac{\pi}{6}$$

$$-\infty < x < \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$$

$$-\infty < \frac{x}{2} < \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$$

$$-\infty < \frac{x}{2} < \sqrt{3}$$

$$-\infty < x < 2\sqrt{3}$$

$$(-\infty; 2\sqrt{3})$$

$$z) \arccos x > \frac{\pi}{6}$$

$\arccos x$ funksiyası

$[-1; 1]$ parçasında təyin

olunmuş, azalan

funksiyadır.

$$\frac{\pi}{6} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$$

olduğundan, verilmiş

bərabərsizliyi

$$\arccos x > \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$$

şəklində yazmaq olar.

Onda onun həlli

$$x < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{və} \quad -1 \leq x \leq 1$$

bərabərsizliyini

ödəməlidir. Onda

$$\begin{cases} x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{alınır,}$$

buradan isə

$$x \in \left[-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{alınır.}$$

$$ə) \arcsin(3x-2) - \arcsin(5x-3) > 0$$

$\arcsin$ funksiya artan funksiya

olduğu üçün

$$\begin{cases} 3x-2 > 5x-3 \\ -1 \leq 3x-2 \leq 1 \Rightarrow \left[\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right) \\ -1 \leq 5x-3 \leq 1 \end{cases}$$

$$k) -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(x-3) \leq \frac{\pi}{6}$$

Arksinus funksiyası $[-1; 1]$

parçasında monoton artan

funksiyadır. Ona görə də

bərabərsizlik

$$-1 \leq x-3 \leq \frac{1}{2} \quad \text{ilə}$$

eynigüclüdür. Buradan

$$\text{isə } 2 \leq x \leq 3,5$$

$$\Rightarrow x \in [2; 3,5]$$

Funksiya

- x - in hər bir qiymətinə y - in yeganə qiyməti uyğundursa, belə asılılığa funksiya deyilir.

$$y = f(x)$$

- x - ə sərbəst dəyişən və ya argument deyilir.

- y -ə asılı dəyişən və ya funksiya deyilir.

- f -ə funksiyanın xarakteristikası deyilir və argumentin üzərində hansı əməllər aparmaq lazım gəldiyini göstərir.

- x -in aldığı qiymətlərə funksiyanın təyin oblastı və ya varlıq oblastı deyilir və $D(f)$ ilə işarə olunur (DMQC).

• y –in aldığı qiymətlərə funksiyanın qiymətlər oblastı və ya dəyişmə oblastı deyilir və $E(f)$ ilə işarə olunur.

Funksiya sözünü elmə ilk dəfə Leybnis daxil edib. Bu sözün mənası əməl etmə, icra etmə deməkdir.

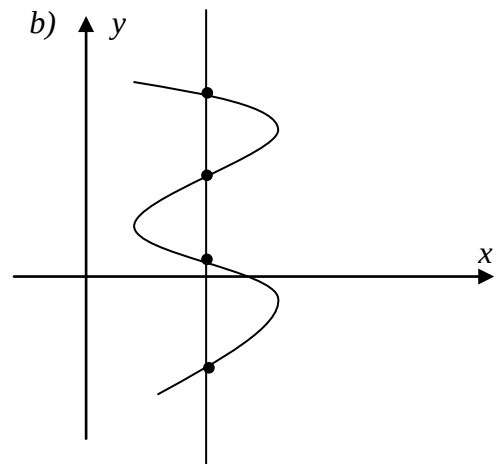
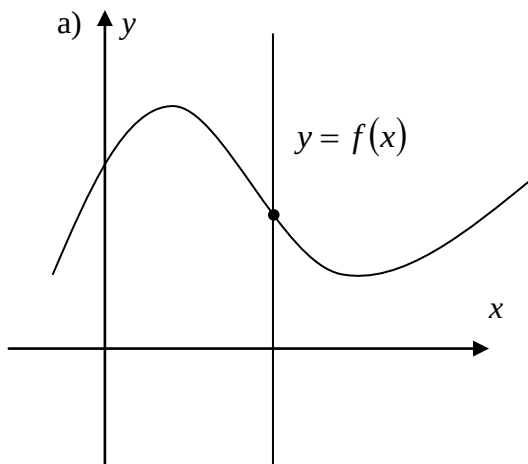
Funksiya 3 üsulla verilir.

1. *cədvəl üsulu*- burada x və y – in qiymətləri hazır cədvəl şəklində verilir. Məsələn, kvadratlar cədvəli, sinuslar cədvəli və s.

2. *düstur üsulu (analitik üsul)*- burada funksiya $y = f(x)$ şəklində düsturla verilir. x -ə qiymət verib, y – in qiymətini özümüz tapırıq.

3. *qrafik üsul*- burada funksiyanın qrafiki verilir, arqumentin və funksiyanın qiymətləri qrafikə görə müəyyən olunur.

- Ordinat oxuna paralel olan istənilən düz xətt verilmiş əyrini yalnız bir nöqtədə kəsdikdə bu əyri hər hansı bir funksiyanın qrafikidir, bir neçə nöqtədə kəsdikdə heç bir funksiyanın qrafiki olmur, a - funksiya, b - funksiya deyil.



- Əgər $x = m$ düz xətti funksiyanın qrafikini kəsmirsə, onda funksiya $x = m$ nöqtəsində təyin olunmamışdır.
- Bəzi hallarda analitik üsulla verilmiş funksiya təyin oblastının müxtəlif aralıqlarında müxtəlif düsturlarla verilir. Belə funksiyalara “hissə-hissə” verilən funksiyalar deyilir.

$$a) f(x) = \begin{cases} x+3, & x < -1 \text{ olduqda,} \\ x^2, & -1 \leq x \leq 1 \text{ olduqda,} \\ 5-x, & x > 1 \text{ olduqda.} \end{cases}$$

Bu o deməkdir ki, $x < -1$ olduqda funksiya $y = x + 3$ düsturu ilə, $-1 \leq x \leq 1$ olduqda $y = x^2$ düsturu ilə, $x > 1$ olduqda $y = 5 - x$ düsturu ilə təyin olunur. Əgər $f(-5)$, $f(0)$, $f(2)$ -ni tapmaq tələb olunarsa, onda əvvəlcə x -in qiymətinin hansı aralığa uyğun olduğunu müəyyən etmək, sonra isə uyğun düsturdan tələb olunan qiyməti tapmaq lazımdır.

$$\text{Onda } f(-5) = -5 + 3 = -2; \quad f(0) = 0^2 = 0; \quad f(2) = 5 - 2 = 3$$

b) Hissə- hissə verilən funksiya daha bir misal kimi Drixle funksiyanı göstərmək olar.

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{əgər } x \text{ rəşional ədəddirsə} \\ 0, & \text{əgər } x \text{ irəşional ədəddirsə} \end{cases}$$

$$D(-1) = D(0) = D(2,5) = D\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$D(-\sqrt{3}) = D(\sqrt{5}) = D(\pi) = 0$$

Misal. $y = \frac{2}{x-1}$ funksiyası $x=1$ olduqda təyin olunmayıb, çünki, $y = \frac{2}{1-1} = \frac{2}{0}$

mümkün deyil.

$$\text{Deməli, } D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty).$$

Misal. $y = x^2 + 1$ həmişə təyin olunub. $D(f) = (-\infty; +\infty).$

● **Qrafikin nöqtədən keçməsi şərti.** Qrafikin hər hansı nöqtədən keçib-keçmədiyini bilmək üçün nöqtənin koordinatlarını funksiyanın tənliyində yerinə yazmaq lazımdır. Əgər doğru bərabərlik alınarsa, onda qrafik həmin nöqtədən keçir.

Misal. $y = 5x - 3$ funksiyası verilib. $A(3;12)$ nöqtəsi bu funksiyanın qrafikinə aiddirmi?

$$y = 5x - 3$$

$$5 \cdot 3 - 3 = 12$$

$$12 = 12 \text{ aiddir.}$$

Qeyd. $x=0$ olduqda $y=0$ alınarsa, funksiyanın qrafiki koordinat başlanğıcından keçir.

● **Qrafikin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtəsinin tapılması.**

• Qrafikin absis oxu ilə kəsişmə nöqtəsini tapmaq üçün funksiyanın tənliyində $y=0$ yazıb həll edirlər.

• Qrafikin ordinat oxu ilə kəsişmə nöqtəsini tapmaq üçün funksiyanın tənliyində $x=0$ götürüb həll edirlər.

Misal. $y = 2x - 8$ funksiyanın qrafikinin oxlarla kəsişmə nöqtəsini tapın.

Həlli.

absis oxu ilə

ordinat oxu ilə

$$y = 0$$

$$x = 0$$

$$2x - 8 = 0$$

$$y = 2 \cdot 0 - 8 = 0 - 8 = -8$$

$$x = 4$$

Cavab: $(4;0)$ və $(0;-8)$

Düz mütənasiblik.

$y = kx$ düsturu ilə verilən funksiya düz mütənasiblik deyilir. x –arqument, y - funksiya,

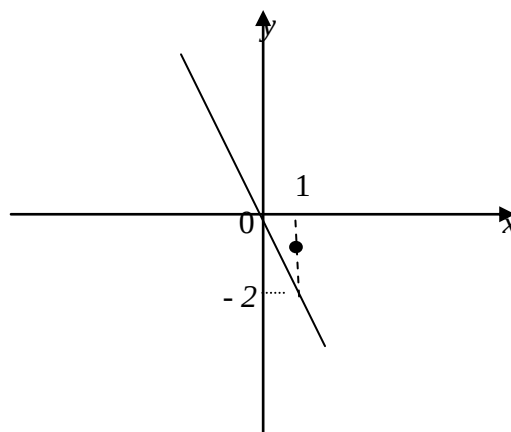
k - düz mütənasiblik əmsalıdır.

- Düz mütənasibliyin qrafiki koordinat başlanğıcından keçən düz xətdir. Qrafiklər

k müsbətdirsə, I – III rübdə

k mənfidirsə, II – IV rübdə olur.

$y = -2x$ - in qrafikini quraq.



x	y
1	-2

- $D(f) = (-\infty; +\infty)$

$E(f) = (-\infty; +\infty)$

Xətti funksiya

$y = kx + b$ şəklində düsturla verilən funksiya xətti funksiya deyilir. x -arqument, y -funksiya, k və b isə istənilən ədəddir.

- k - ya düz xəttin bucaq əmsalı deyilir. k - əmsalı düz xəttin x oxu ilə əmələ gətirdiyi bucağı göstərir. k müsbətdirsə, bu bucaq itidir, k mənfidirsə bu bucaq kor bucaq olur. $k = -\frac{y}{x}$ olur.

- b – y ə ibtidai ordinat deyilir və düz xəttin (qrafikin) y oxunu hansı nöqtədə kəsdiyini göstərir.

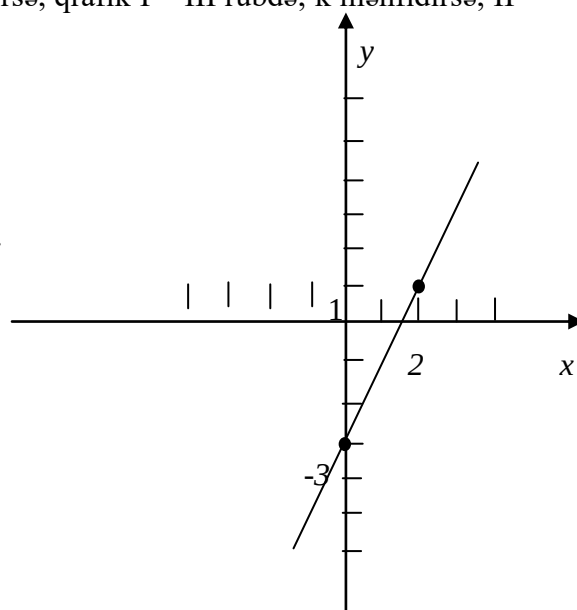
- Xətti funksiyanın qrafiki düz xətdir. k müsbətdirsə, qrafik I – III rübdə; k mənfidirsə, II – IV rübdə yerləşir.

Xətti funksiya üçün $D(f) = (-\infty; +\infty)$

$$E(f) = (-\infty; +\infty)$$

Misal. $y = 2x - 3$ funksiyanın qrafikini qurun.

Həlli: Məlumdur ki, xətti funksiyanın qrafiki düz xətdir. Düz xətti qurmaq üçün iki nöqtə lazımdır.



x	y
0	-3
2	1

- Əgər $k_1 \neq k_2$ olarsa, düz xətlər kəsişir.

$y = 5x - 3$ və $y = -4x + 2$ düz xətləri kəsişir.

- Əgər $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$ olarsa, düz xətlər paralel olur.

$$y = 3x - 2 \quad \text{və} \quad y = 3x + 5 \quad \text{düz xətləri paraleldir.}$$

- Əgər $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$ olarsa, düz xətlər üst-üstə düşür.

$$y = 3x - 5 \quad \text{və} \quad y = 3x - 5 \quad \text{düz xətləri üst-üstə düşür.}$$

- Əgər $k_1 \cdot k_2 = -1$ olarsa, düz xətlər bir- birinə perpendikulyar olur.

$$y = 2x - 5 \quad \text{və} \quad y = -\frac{1}{2}x + 3 \quad \text{düz xətləri bir-birinə perpendikulyardır.}$$

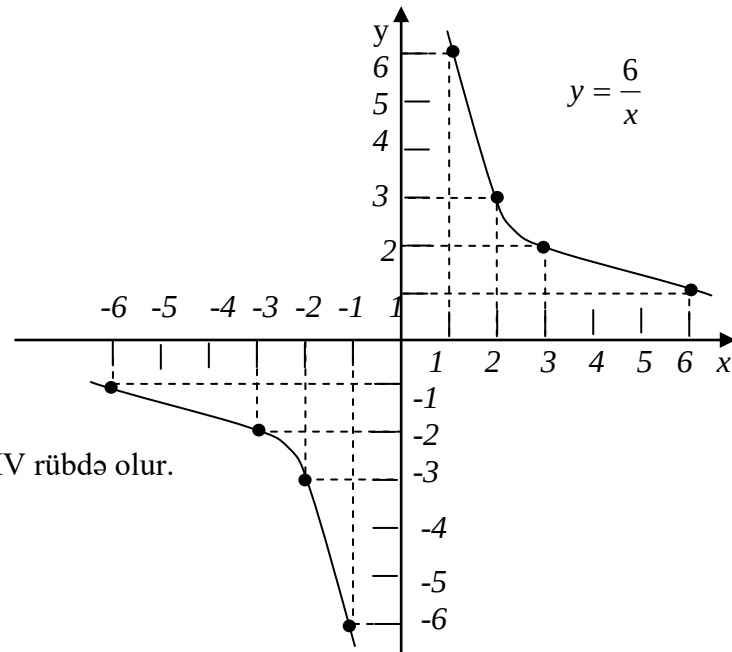
- $y = kx$ və $y = kx + b$ - nin qrafikləri həmişə bir-birinə paralel olur.

Tərs mütənasiblik

$y = \frac{k}{x}$ düsturu ilə verilən funksiya tərs mütənasiblik deyilir. x - argument, y - funksiya,

k – isə tərs mütənasiblik əmsalıdır. Tərs mütənasibliyin qrafiki hiperbola adlanır.

x	y
1	6
2	3
3	2
6	1
-1	-6
-2	-3
-3	-2
-6	-1



$k > 0$ olsa, qrafik I- III rübdə; $k < 0$ olsa, II – IV rübdə olur.

$$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

$$E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

Modul funksiyalar

- $y = |x|$ şəklində olan funksiya modul funksiya adlanır.

$$D(f) = (-\infty; +\infty) \quad E(f) = [0; +\infty)$$

- $y = -|x|$ funksiyası üçün

$$D(f) = (-\infty; +\infty) \quad E(f) = (-\infty; 0]$$

- $y = |kx + b|$ funksiyası üçün

$$D(f) = (-\infty; +\infty) \quad E(f) = [0; +\infty)$$

- $y = -|kx + b|$ funksiyası üçün

$$D(f) = (-\infty; +\infty) \quad E(f) = (-\infty; 0]$$

- $y = a|kx + b|$ funksiyası üçün

$$D(f) = (-\infty; +\infty)$$

$$E(f) = [a; +\infty)$$

- $y = -a|kx + b|$ funksiyası üçün

$$D(f) = (-\infty; +\infty)$$

$$E(f) = (-\infty; -a]$$

- $y = a|kx + b| + c$ funksiyası üçün

$$D(f) = (-\infty; +\infty)$$

$$a < 0 \text{ olarsa, } E(f) = (-\infty; c]$$

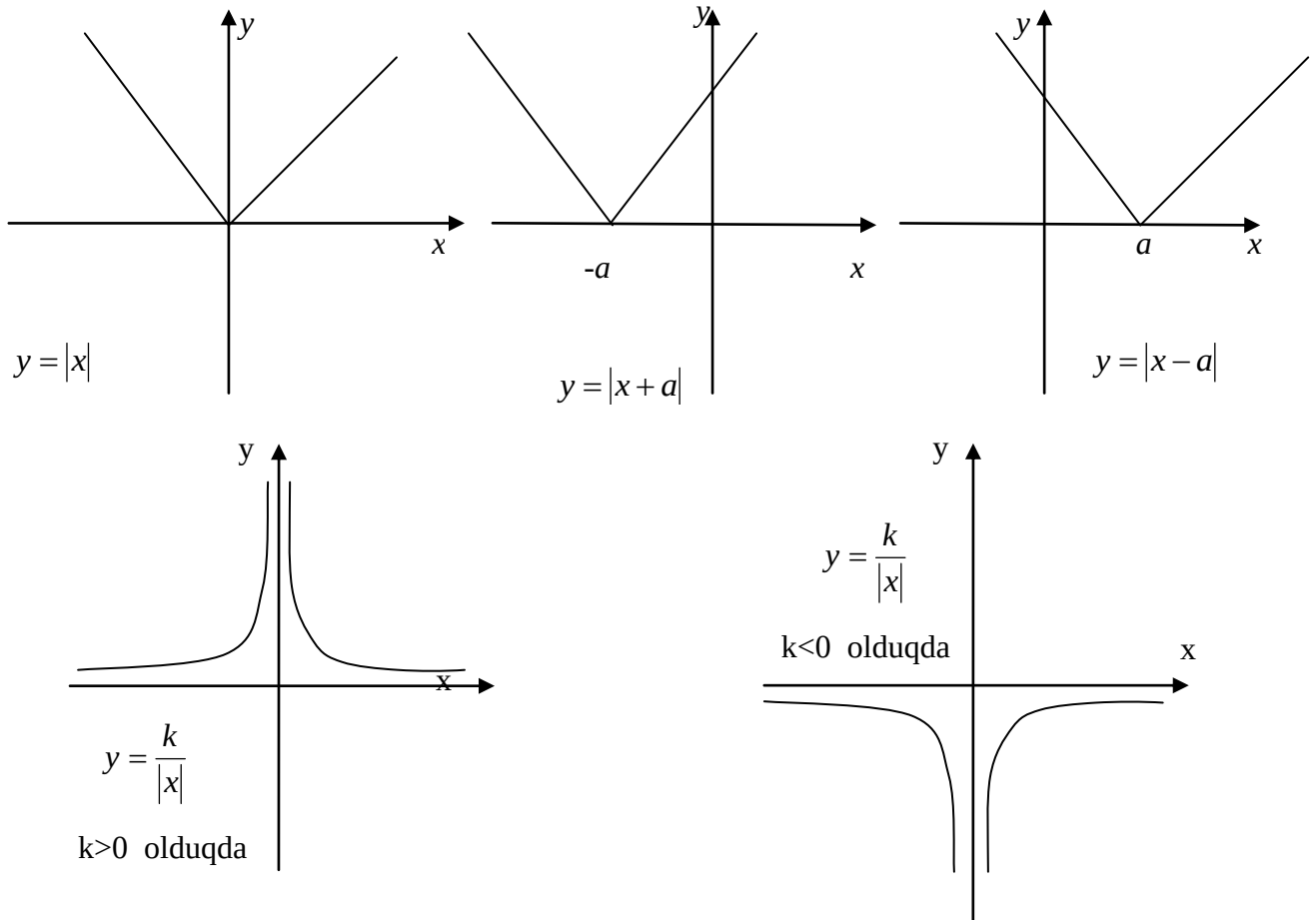
$$a > 0 \text{ olarsa, } E(f) = [c; +\infty) \text{ olur.}$$

Misal. $y = -|3x + 4| + 3$ funksiyası üçün

$$D(f) = (-\infty; +\infty)$$

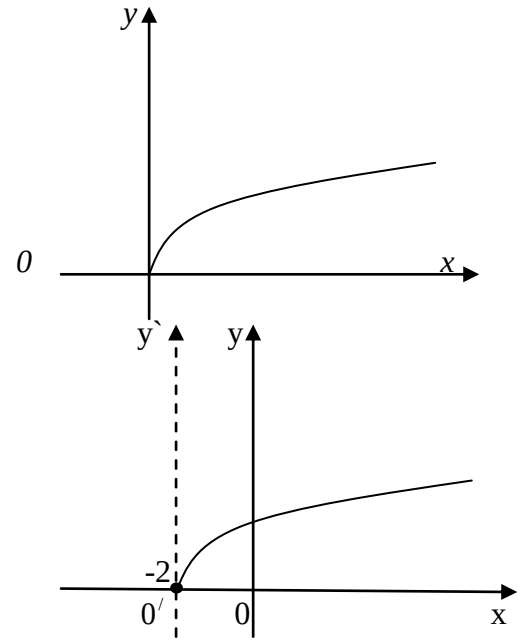
$$E(f) = (-\infty; 3]$$

Qrafiklərə aid nümunələr aşağıda verilmişdir.



$$y = \sqrt{x} \text{ funksiyası}$$

1. $D(f) = [0; +\infty)$
 2. $E(f) = [0; +\infty)$
 3. Funksiyanın qrafiki I rübdə yerləşir.
 4. $x = 0$ olduqda $y = 0$. Ona görə də funksiyanın qrafiki koordinat başlanğıcından keçir.
- $y = \sqrt{x+a}$ - nın qrafikini qurmaq üçün $y = \sqrt{x}$ -in qrafikini qurub, bu qrafikin hər bir nöqtəsini absis oxuna paralel, $a > 0$ olduqda a vahid sola, $a < 0$ olduqda isə a vahid sağa köçürmək lazımdır.
- $y = \sqrt{x+2}$ - funksiyasının qrafiki şəkildə verilmişdir.



Funksiyanın işarə sabitliyi intervalları.

- Funksiyanın “+” olduğu aralığı tapmaq üçün $y > 0$ götürülür;
- Funksiyanın “-” olduğu aralığı tapmaq üçün $y < 0$ götürülür;
- Funksiyanın sıfırlarını tapmaq üçün $y = 0$ götürülür.

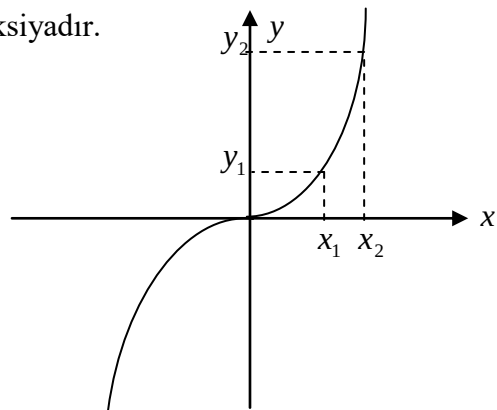
Artan və azalan funksiyalar.

- Funksiyanın təyin oblastından götürülmüş istənilən $x_1 < x_2$ üçün $f(x_1) < f(x_2)$ olarsa, belə funksiya artan funksiya deyil.

X çoxluğunda argumentin böyük qiymətinə funksiyanın böyük qiyməti uyğun gələrsə, belə funksiya bu çoxluqda artan funksiya deyil.

Misal: $f(x) = x^3$ funksiyası artan funksiya.

x	y
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27

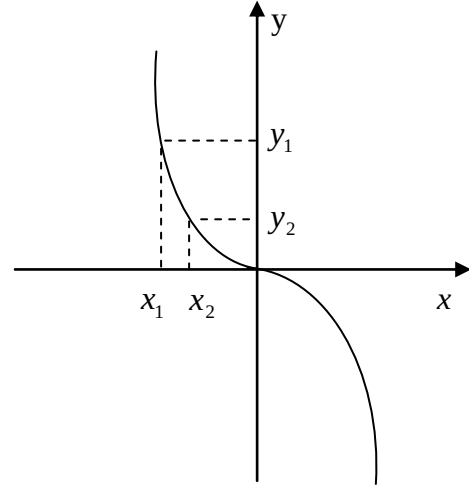


Görünür ki, x argumentinin qiymətləri artdıqca, y funksiyasının qiyməti də artır.

- $x_1 < x_2$ olduqda $f(x_1) > f(x_2)$ olarsa belə funksiya azalan funksiya deyilir. X çoxluğunda arqumentin böyük qiymətinə funksiyanın kiçik qiyməti uyğun gələrsə, belə funksiya azalan funksiya deyilir.

Misal . $f(x) = -x^3$ azalan funksiya.

x	y
-2	8
-1	1
0	0
1	-1
2	-8



Görünür ki, x arqumentinin qiymətləri artdıqca y funksiyanın qiyməti azalır.

Artan və azalan funksiyalar birlikdə monoton funksiya adlanır.

2. f funksiyası artandırsa, istənilən c ədədi üçün $f+c$ -də artandır.
3. f funksiyası artandırsa, istənilən $c > 0$ ədədi üçün cf -də artandır.
4. f funksiyası artandırsa, istənilən $c < 0$ ədədi üçün cf azalandır.
5. f və g funksiyası artırsa $f + g$ funksiyası da artır.
6. f və g funksiyası artandırsa və mənfi olmayandırsa, onda fg hasili də artandır.
7. f funksiyası artandırsa və mənfi olmayan qiymətlər alırsa, istənilən natural n ədədi üçün f^n funksiyası da artan funksiya.

8. f funksiyası X çoxluğunda artırsa və işarəsini saxlayırsa, $\frac{1}{f}$ funksiyası da bu çoxluqda azalır. Məs: $f(x) = x^2 + 2x + 3$ funksiyası $[-1; +\infty)$ çoxluğunda artır və müsbət qiymətlər alır. Ona görə də $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$ funksiyası $[-1; +\infty)$ aralığında azalır.

(1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) təklifləri azalan funksiyalar üçün də doğrudur.

- $y = kx + b$; $y = kx$ funksiyaları $k > 0$ olsa $(-\infty; +\infty)$ -da artır.

$k < 0$ olsa $(-\infty; +\infty)$ -da azalır.

- $y = \frac{k}{x}$ funksiyası $k > 0$ olsa öz təyin oblastında azalır.

$k < 0$ olsa öz təyin oblastında artır.

$y = \frac{3}{x-2}$ funksiyası $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ aralığında azalır.

- $f(x)$ funksiyası X çoxluğunda artandırırsa, $-f(x)$ funksiyası bu çoxluqda azalandır.
- $f(x)$ funksiyası X çoxluğunda azalandırırsa, $-f(x)$ funksiyası bu çoxluqda artandır.

Tərs funksiya

● Özünün hər bir qiymətini arqumentin yalnız bir qiymətində alan funksiya tərsi olan funksiya deyilir.

● Verilmiş funksiyanın tərs funksiyanı tapmaq üçün funksiyanın tənliyində x -in əvəzinə y , y -in əvəzinə isə x yazıb, y -i tapmaq lazımdır. Funksiyanın tərsi $f^{-1}(x)$ kimi işarə edilir.

Misal. $y = 2x + 6$ funksiyanın tərs funksiyanı tapmaq.

$$x = 2y + 6$$

$$-2y = -x + 6$$

$$2y = x - 6$$

$$y = \frac{1}{2}x - 3$$

Deməli, $y = \frac{1}{2}x - 3$ və $y = 2x + 6$ funksiyları bir-birinin tərsidir.

- Tərs funksiyanın təyin və qiymətlər oblastı öz rollarını dəyişirlər.

Məsələn, fərz edək ki, $f(x)$ funksiyanı üçün

$$D(f) = (0; +\infty)$$

$$E(f) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$$

Onda $f(x)$ -in tərs funksiyanı üçün

$$D(f) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$$

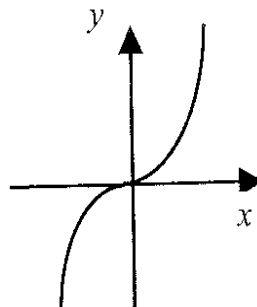
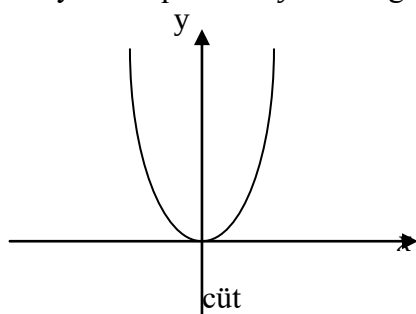
$$E(f) = (0; +\infty) \text{ olur.}$$

● Eyni bir koordinat müstəvisində tərs funksiyların qrafiklərini qursaq, onda görürük ki, onların qrafikləri $y = x$ düz xəttinə nəzərən simmetrikdir.

- X çoxluğunda hər bir artan (azalan) funksiyanın tərs funksiyanı var.

Cüt və tək funksiyalar.

- $f(-x) = -f(x)$ olarsa, belə funksiya tək funksiya deyilir.
 $f(-x) = f(x)$ olarsa, belə funksiya cüt funksiya deyilir.
- Tək funksiyaların qrafikləri koordinat başlanğıcına görə simmetrikdir.
- Cüt funksiyaların qrafikləri y oxuna görə simmetrik olur.



- Tək funksiya $f(1) = -f(-1)$
Cüt funksiya $f(1) = f(-1)$
- Tək funksiyalarda $f(0) = 0$ olur. Cüt funksiya bu ola da bilər, olmaya da bilər.

Misal.

a) $f(x) = x^3 - 4x$ funksiyası tək funksiya,dir,

$$f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1 = 1 - 4 = -3$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1) = -1 + 4 = 3$$

görünür ki, cavablar qiymətcə bərabər, işarəcə əksdir.

b) $f(x) = 2x^4 - x^2$ funksiyası cüt funksiya,dir,

$$f(1) = 2 \cdot 1^4 - 1^2 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^4 - (-1)^2 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

Cavablar bərabərdir.

ç) $f(x) = \sqrt{x}$; $y = x^4 + x$; $y = 3x + 1$ funksiyaları nə tək, nə də cütdür.

1. İki cüt funksiyanın cəmi cüt funksiya $[C] + [C] = [C]$
2. İki tək funksiyanın cəmi tək funksiya $[T] + [T] = [T]$
3. İki cüt funksiyanın hasilı və qisməti cüt funksiya $[C] \cdot [C] = [C]$
4. İki tək funksiyanın hasilı və qisməti cüt funksiya. $[T] \cdot [T] = [C]$
5. Cüt və tək funksiyanın hasilı və qisməti tək funksiya. $[T] \cdot [C] = [T]$

6. Cüt və tək funksiyanın cəmi nə tək, nə də cüt funksiya, $[C]+[T]$ - nə tək, nə də cütdür.

7. f cüt (tək) funksiya, $\frac{1}{f}$ - də cüt (tək) funksiya, yəni $\frac{1}{[C]} = [C]$, $\frac{1}{[T]} = [T]$

• $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arccotg} x$ nə tək, nə də cütdür.

• $y = \log_a |x|$ cütdür; $f(x) = |x^3|$; $y = \sqrt{|x|}$ və s. də cütdür.

• $f(x) = 0$ funksiyası həm cüt, həm də tək olan yeganə funksiya.

• $f(x) = a$ sabit funksiyası həmişə cütdür.

Kvadratik funksiya

$y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) şəklində düsturla verilən funksiya kvadrat funksiya deyilir.

Bu funksiyanın qrafiki paraboladır.

$a > 0$ olsa, parabolanın qolları yuxarı yönəlir.

$a < 0$ olsa, parabolanın qolları aşağı yönəlir.

c ədədi funksiyanın qrafikinin y oxu ilə kəsişdiyi nöqtəni göstərir. Funksiyanın təyin oblastı $D(f) = (-\infty; +\infty)$ olur.

Parabolanın təpə nöqtəsinin koordinatları $(x; y)$ belə tapılır

$$x = -\frac{b}{2a}; \quad y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Əgər $a > 0$ olsa, onda qiymətlər oblastı $[y; +\infty) = \left[-\frac{b^2 - 4ac}{4a}; +\infty \right)$

$a < 0$ olsa qiymətlər oblastı $[-\infty; y) = \left(-\infty; -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right]$

Kvadrat funksiyanın qrafiklərini qurmaq üçün onu tam kvadrat ayırmaqla, $y = a(x - m)^2 + n$ şəklində yazırlar.

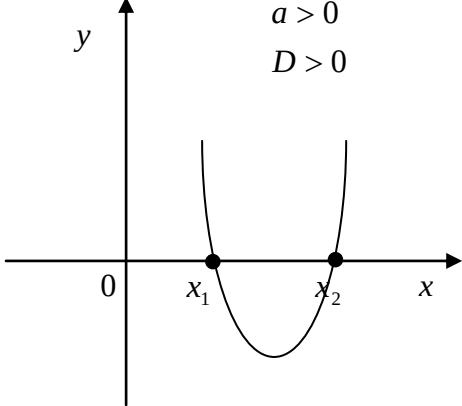
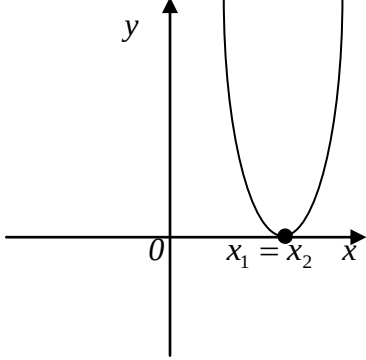
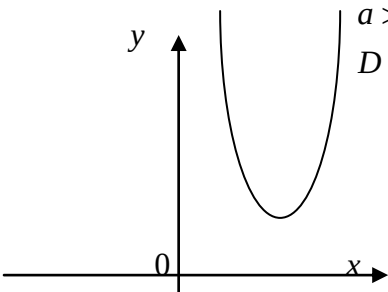
• $y = ax^2 + n$ funksiyanın qrafiki $y = ax^2$ funksiyanın qrafikini OY oxu boyunca $n > 0$ olduqda yuxarı, $n < 0$ olduqda aşağı sürüşdürməklə alınır.

• $y = a(x - m)^2$ funksiyanın qrafiki $y = ax^2$ funksiyanın qrafikini OX oxu boyunca $m > 0$ olduqda sola, $m < 0$ olduqda sağa sürüşdürməklə alınır.

- $y = a(x - m)^2 + n$ funksiyasının qrafiki $y = ax^2$ funksiyasının qrafikini $n > 0$ olduqda yuxarı, $n < 0$ olduqda aşağı OY oxu boyunca, $m > 0$ olduqda sola, $m < 0$ olduqda sağa OX oxu boyunca sürüşdürməklə alınır.

Kvadrat bərabərsizliklərin həlli

$ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ ($a \neq 0$) və s. şəklində olan bərabərsizliklərə kvadrat bərabərsizlik deyilir. Burada x dəyişən; a, b, c isə verilmiş ədədlərdir.

1. $a > 0$, $D > 0$ olduqda parabolun qolları yuxarı yönəlir və absis oxunu x_1, x_2 nöqtələrində kəsir. $ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ $ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$ $ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow x \in (x_1; x_2)$ $ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow x \in [x_1; x_2]$	$a > 0$ $D > 0$ 
2. $a > 0$, $D = 0$. Bu halda parabola absis oxuna toxunur və $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ $ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$ $ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty)$ $ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow x \in \emptyset$ bərabərsizliyin həlli yoxdur. $ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow x \in \{x_1\}$ bərabərsizliyin həlli yalnız $x = x_1$ ədədidir.	$a > 0$ $D = 0$ 
3. $a > 0$, $D < 0$. Parabola absis oxunu kəsmir və ondan yuxarıda yerləşir. $ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty)$ $ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow x \in \emptyset$, bərabərsizliyin həlli yoxdur.	$a > 0$ $D < 0$ 
4. $a < 0$ olduqda, bərabərsizliyin hər iki tərəfini mənfi birə vurmaqla, yuxarıdakı hallardan birinə gətirmək lazımdır.	

$y = ax^n$ funksiyası

1. n -cüt, $a > 0$ olarsa, $y = ax^n$

cüt funksiya olur və qrafiki parabola adlanır.

$$D(f) = (-\infty; +\infty)$$

$$E(f) = [0; +\infty)$$

2. n -tək, $a > 0$ olarsa, $y = ax^n$

funksiyası tək, artan funksiya olur və

qrafiki kub parabola adlanır.

$$D(f) = (-\infty; +\infty)$$

$$E(f) = (-\infty; +\infty)$$

3. n -cüt, $a < 0$ olarsa, $y = ax^n$

funksiyası cüt funksiya və qrafiki

şəkildə göstərilmişdir.

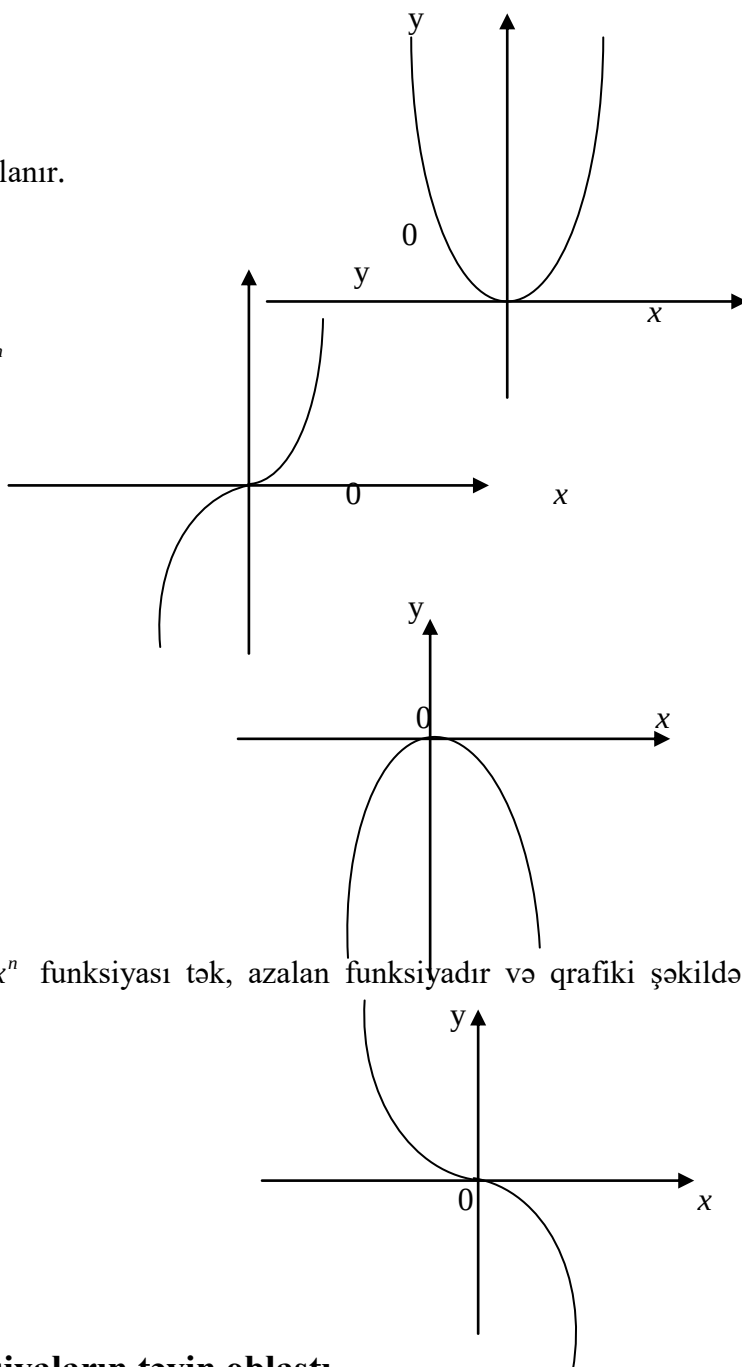
$$D(f) = (-\infty; +\infty)$$

$$E(f) = (-\infty; 0]$$

4. n -tək, $a < 0$ olarsa, $y = ax^n$ funksiya tək, azalan funksiya və qrafiki şəkildə göstərilmişdir.

$$D(f) = (-\infty; +\infty)$$

$$E(f) = (-\infty; +\infty)$$



Funksiyaların təyin oblastı

Funksiyanın təyin olunduğu nöqtələr çoxluğuna onun təyin oblastı deyilir və $D(f)$ ilə işarə olunur.

- $y = kx + b$ xətti funksiya üçün $D(f) = (-\infty; +\infty)$
- $y = \frac{k}{x}$ şəkildə funksiya üçün məxrəcdəki ifadə sıfırdan fərqli götürülür, $y = \frac{8}{x-4}$;
 $x - 4 \neq 0$; $x \neq 4 \Rightarrow D(f) = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$
- $y = ax^2 + bx + c$ şəkildə funksiya üçün $D(f) = (-\infty; +\infty)$

- $y = |x|, y = -|x|, y = |ax + b|, y = -|ax + b|, y = k|ax + b| + c$ şəklində funksiyalar üçün $D(f) = (-\infty; +\infty)$
- $y = ax^n$ ($n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$) funksiyası üçün $D(f) = (-\infty; +\infty)$
- $y = \sqrt[n]{f(x)}$ funksiyası üçün, n cüt olduqda, $f(x) \geq 0$ olmalıdır.
 n tək olduqda $D(f) = (-\infty; +\infty)$
- $y = \frac{1}{\sqrt[n]{f(x)}}$ funksiyası üçün, n cüt olduqda, $f(x) > 0$ olmalıdır.
 n tək olduqda $f(x) \neq 0$ götürülür.
- $y = a^x$ üstlü funksiyası üçün $D(f) = (-\infty; +\infty)$
- $y = \log_a x$ funksiyası üçün loqarifmin qarşısındakı ifadə sıfırdan böyük götürülüb, həll olunur.
- $y = \sin x, y = \cos x$ funksiyaları üçün $D(f) = (-\infty; +\infty)$
- $y = \operatorname{tg} x$ üçün təyin oblast $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$
- $y = \operatorname{ctg} x$ üçün təyin oblast $D(f) = (\pi k; \pi + \pi k), k \in \mathbb{Z}$
- $y = \arcsin x$ funksiyası üçün $D(f) = [-1; 1]$
- $y = \arccos x$ funksiyası üçün $D(f) = [-1; 1]$
- $y = \operatorname{arctg} x$ funksiyası üçün $D(f) = (-\infty; +\infty)$
- $y = \operatorname{arcctg} x$ funksiyası üçün $D(f) = (-\infty; +\infty)$

Funksiyaların qiymətlər oblastı

Funksiyaların təyin oblastında aldığı qiymətlər çoxluğuna onun qiymətlər oblastı deyilir və $E(f)$ ilə işarə olunur.

- $y = kx + b$ xətti funksiyası üçün $E(f) = (-\infty; +\infty)$
- $y = \frac{k}{x}$ funksiyası üçün $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
- $y = ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n$ funksiyası üçün
 $a > 0$ olduqda $E(f) = [n; +\infty)$

$a < 0$ olduqda $E(f) = (-\infty; n]$, burada

$$m = -\frac{b}{2a}; n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \text{ olur.}$$

• $y = |x|, y = |ax + b|$ funksiyaları üçün $E(f) = [0; +\infty)$ olur.

• $y = -|x|, y = -|ax + b|$ funksiyaları üçün $E(f) = (-\infty; 0]$ olur.

• $y = k|ax + b| + c$ funksiyası üçün

$$k < 0 \text{ olduqda } E(f) = (-\infty; c]$$

$$k > 0 \text{ olduqda } E(f) = [c; +\infty) \text{ olur.}$$

• $y = ax^n$ ($a \in R, a \neq 0, n \in N$) funksiyası üçün

$$a > 0, n \text{ cüt olduqda, } E(f) = [0; +\infty)$$

$$a > 0, n \text{ tək olduqda, } E(f) = (-\infty; +\infty)$$

$$a < 0, n \text{ cüt olduqda, } E(f) = (-\infty; 0]$$

$$a < 0, n \text{ tək olduqda, } E(f) = (-\infty; +\infty)$$

• $y = \sqrt[n]{x}$ funksiyası üçün

$$n \text{ cüt olduqda, } E(f) = [0; +\infty)$$

$$n \text{ tək olduqda, } E(f) = (-\infty; +\infty)$$

• $y = -\sqrt[n]{x}$ funksiyası üçün

$$n \text{ cüt olduqda, } E(f) = (-\infty; 0]$$

$$n \text{ tək olduqda, } E(f) = (-\infty; +\infty)$$

• $y = \sqrt[n]{ax + b}$ funksiyası üçün

$$n \text{ cüt olduqda, } E(f) = [0; +\infty)$$

$$n \text{ tək olduqda, } E(f) = (-\infty; +\infty) \text{ olur.}$$

• $y = -\sqrt[n]{ax + b}$ funksiyası üçün

$$n \text{ cüt olduqda, } E(f) = (-\infty; 0]$$

$$n \text{ tək olduqda, } E(f) = (-\infty; +\infty)$$

• $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ funksiyası üçün

$$a > 0 \text{ olduqda } \left[\sqrt{n}; +\infty \right), n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$a < 0 \text{ olduqda } [0; \sqrt{n}], \quad n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

- $y = a^x$ üstlü funksiyası üçün $E(f) = (0; +\infty)$
- $y = \log_a x$ funksiyası üçün $E(f) = (-\infty; +\infty)$
- $y = \sin x, y = \cos x$ funksiyası üçün $E(f) = [-1; 1]$
- $y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$ funksiyaları üçün $E(f) = (-\infty; +\infty)$
- $y = \arcsin x$ funksiyası üçün $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- $y = \arccos x$ funksiyası üçün $E(f) = [0; \pi]$
- $y = \operatorname{arctg} x$ funksiyası üçün $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
- $y = \operatorname{arcctg} x$ funksiyası üçün $E(f) = (0; \pi)$
- $y = [x]$ funksiyasının təyin oblastı $D(f) = (-\infty; +\infty)$
- $y = [x]$ funksiyasının qiymətlər çoxluğu tam ədədlər çoxluğudur, $E(f) = Z$
- $y = \{x\}$ funksiyasının təyin oblastı $D(f) = (-\infty; +\infty)$
- $y = \{x\}$ funksiyasının qiymətlər oblastı $E(f) = [0; 1)$ -dir.

Misallar: **a)** $y = (2x - 1)^{\frac{2}{3}}$ $D(f) = ?$

$$\text{Kəsr üstlü qüvvətin tərifinə görə } 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$D(f) = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

b) $y = (3 - 4x)^{-\frac{2}{3}}$ funksiyası üçün $D(f) = ?$

$$3 - 4x > 0 \Rightarrow -4x > -3 \Rightarrow x < \frac{3}{4} \Rightarrow D(f) = \left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$$

c) $y = \arccos(3 - \sqrt{x+1})$ təyin oblastı tapın.

$$-1 \leq 3 - \sqrt{x+1} \leq 1$$

$$-4 \leq -\sqrt{x+1} \leq -2$$

$$2 \leq \sqrt{x+1} \leq 4$$

$$4 \leq x+1 \leq 16$$

$$3 \leq x \leq 15 \text{ deməli, } D(f) = [3; 15]$$

d) $y = 3\sqrt{x-2} + 1$ funksiyasının qiymətlər oblastını tapın.

$$y = 3\sqrt{x-2} + 1 \Rightarrow 3\sqrt{x-2} = y - 1 \Rightarrow \sqrt{x-2} = \frac{y-1}{3} \Rightarrow \frac{y-1}{3} \geq 0 \Rightarrow y \geq 1$$

$$E(f) = [1; +\infty)$$

e) $y = -5\sin 3x + 7$ funksiyasının qiymətlər oblastını tapın.

$$-5\sin 3x + 7 = y$$

$$-5\sin 3x = y - 7$$

$$\sin 3x = \frac{y-7}{-5} \Rightarrow \sin 3x = \frac{7-y}{5}$$

burada, $-1 \leq \sin 3x \leq 1$ olduğuna görə

$$-1 \leq \frac{7-y}{5} \leq 1$$

$$-5 \leq 7-y \leq 5$$

$$-12 \leq -y \leq -2$$

$$2 \leq y \leq 12$$

ə) $y = \sqrt{2+6x-x^2}$ funksiyasının qiymətlər oblastını tapın.

$$I \text{ üsul. } y = \sqrt{2+6x-x^2} = \sqrt{-(x^2-6x-2)} = \sqrt{-((x-3)^2-9-2)} = \sqrt{11-(x-3)^2}$$

buradan görünür ki, $(x-3)^2$ həmişə ≥ 0 olduğundan ifadənin qiymətlər oblastı

$$0 \leq \sqrt{11-(x-3)^2} \leq \sqrt{11} \Rightarrow [0; \sqrt{11}]$$

II üsul. $a < 0$ olduğu üçün $y = \sqrt{2+6x-x^2}$ funksiyasının qiymətlər oblastı $[0; \sqrt{n}]$ olur.

$$n = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{6^2-4 \cdot (-1) \cdot 2}{4 \cdot (-1)} = \frac{36+8}{4} = \frac{44}{4} = 11$$

Onda, cavab $[0; \sqrt{11}]$ olur.

f) $y = 3\sin x \cos x$ funksiyasının qiymətlər oblastını tapın.

$$y = 3\sin x \cos x = \frac{3}{2} \sin 2x \text{ kimi yazaq, } -1 \leq \sin 2x \leq 1 \text{ olduğundan}$$

$$-\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2} \Rightarrow E(f) = \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$$

g) $y = 4\cos x + 3\sin x$ funksiyasının qiymətlər oblastını tapın.

$y = a \cos x + b \sin x$ tipli funksiyaların qiymətlər oblastı $[-\sqrt{a^2 + b^2}; \sqrt{a^2 + b^2}]$ -dir.

Onda $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$. $E(y) = [-5; 5]$ alırıq.

h) $y = \frac{3x-5}{4x+7}$ funksiyasının qiymətlər oblastını tapın.

Əvvəlcə tərs funksiyanı tapaq

$$\frac{3y-5}{4y+7} = x \Rightarrow 4xy + 7x = 3y - 5 \Rightarrow 4xy - 3y = -5 - 7x \Rightarrow y(4x - 3) = -5 - 7x \Rightarrow y = \frac{-5 - 7x}{4x - 3}$$

Bunun təyin oblastı

$$4x - 3 \neq 0 \Rightarrow 4x \neq 3 \Rightarrow x \neq \frac{3}{4}.$$

Deməli, tərs funksiya üçün $D(f) = \left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$. Qarşılıqlı tərs funksiyaların təyin və

qiymətlər oblastı öz rollarını dəyişir. Onda $E(y) = \left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

m) $y = \frac{6}{x^2 + 2x + 3}$ funksiyasının qiymətlər oblastını tapın.

$$y = \frac{6}{x^2 + 2x + 3} = \frac{6}{(x+1)^2 + 2}$$

Aydındır ki, bu ifadənin məxrəci $(x+1)^2 + 2 \geq 2$. Onda $\frac{1}{(x+1)^2 + 2} \leq \frac{1}{2}$ hər tərəfi 6-ya

vursaq

$$\frac{1}{(x+1)^2 + 2} \cdot 6 \leq \frac{1}{2} \cdot 6 \Rightarrow \frac{6}{(x+1)^2 + 2} \leq 3.$$

Digər tərəfdən $\frac{6}{(x+1)^2 + 2}$ həmişə müsbətdir, yəni $y > 0$. Onda $E(f) = (0; 3]$ alırıq.

n) $y = \frac{6}{x^2 + 2x + 3}$ funksiyasının təyin oblastını tapaq.

$$y = \frac{6}{x^2 + 2x + 3} = \frac{6}{(x+1)^2 + 2}$$

$(x+1)^2 + 2$ ifadəsinin x -in istənilən qiymətində mənası var. Onda $D(f) = (-\infty; +\infty)$ alınır.

Dövri funksiyalar

Təbiətdə bir sıra proseslər var ki, onlar vaxtaşırı təkrarlanır. Belə proseslər dövri proseslər adlanır. Məsələn, Yer kürəsinin Günəş ətrafında tam bir dövrünün 1 il olması, gecədən sonra gündüzün gəlməsi və s. Dövri dəyişən kəmiyyətlər arasındakı asılılıq dövri funksiyalarla müəyyən olunur.

• Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası verilmişdir və elə $T \neq 0$ ədədi vardır ki, bu funksiyanın təyin oblastından olan istənilən x üçün $x-T$ və $x+T$ –də təyin oblastına daxildir və

$$f(x-T) = f(x) = f(x+T)$$

bərabərlikləri ödənilir. Onda $f(x)$ funksiyasına dövrü T olan dövrü funksiya deyilir.

• Sıfır istənilən funksiyanın dövrüdür. Dövrü sıfır olan funksiyalar maraqlı deyil. Ona görə də $T \neq 0$ götürülür.

• T ədədi $f(x)$ funksiyasının dövrüdürsə, onda istənilən n tam ədədi üçün nT ədədi də bu funksiyanın dövrüdür, deməli, T ədədi f funksiyasının dövrüdürsə, $-T$ ədədi də f funksiyasının dövrüdür.

• Tutaq ki, $y = f(x)$ və $y = g(x)$ dövrü funksiyalardır və f funksiyasının dövrü T_1 , g funksiyasının dövrü isə T_2 - dir.

Onda $f + g$; $f - g$; $f \cdot g$; $\frac{f}{g}$ funksiyaların dövrü $T = \text{ƏKOB}(T_1, T_2)$ olur.

• Funksiyanın ən kiçik müsbət dövrünə onun əsas dövrü deyilir.

• $f(x) = C$ sabit funksiya dövrü funksiya deyil və istənilən ədəd bu funksiyanın dövrüdür.

Məs. $y = 6$ Bunun dövrü istənilən ədəddir.

• Bütün rəşional ədədlər Dirixle funksiyasının dövrüdür.

• $f(x) = [x]$ funksiyası dövrü funksiya deyil.

• $f(x) = \{x\}$ funksiyası dövrü funksiya deyil, istənilən tam müsbət ədəd bu funksiyanın dövrüdür. Ən kiçik müsbət tam ədəd 1 olduğu üçün ən kiçik müsbət dövr 1-dir. Əgər

$f(x) = \{kx + b\}$, $k, b \in R$ olarsa, ən kiçik müsbət dövr $T = \frac{1}{|k|}$ olur.

• Sinus və kosinusun ən kiçik müsbət dövrü 2π ; tg və ctg üçün π -dir.

• $f(x) = C + \{x\} \Rightarrow$ əsas dövrü $T = 1$

• $f(x) = C \cdot \{x\} \Rightarrow$ əsas dövrü $T = 1$

• $f(x) = \{C \cdot x\} \Rightarrow$ əsas dövrü $T = \frac{1}{C}$

• $f(x) = \left\{ \frac{x}{C} \right\} \Rightarrow$ əsas dövrü $T = C$

- $f(x) = \{m \cdot x\} + \{n \cdot x\} \Rightarrow$ əsas dövrü $T = \Theta KOB\left(\frac{1}{m}; \frac{1}{n}\right)$

Misal a) $f(x) = \{x\} - \{2x\}$ funksiyasının əsas dövrünü tapın.

$$T = \Theta KOB\left(1; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Theta KOB(2; 1) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

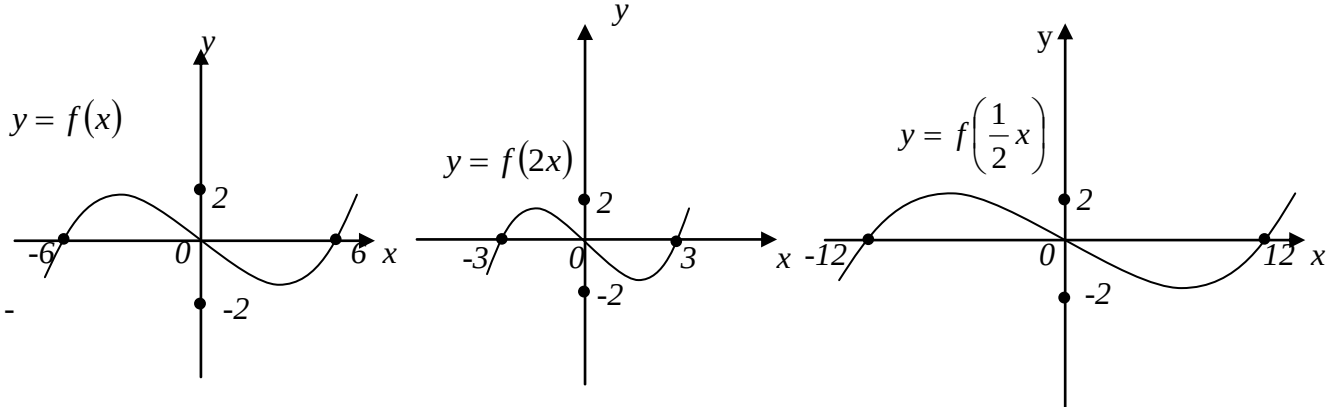
b) $f(x) = \left\{\frac{x}{3}\right\} - 2 \cdot \left\{\frac{x}{5}\right\}$ funksiyasının əsas dövrünü tapın.

$$T = \Theta KOB\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{5}\right) = \Theta KOB(3; 5) = 15$$

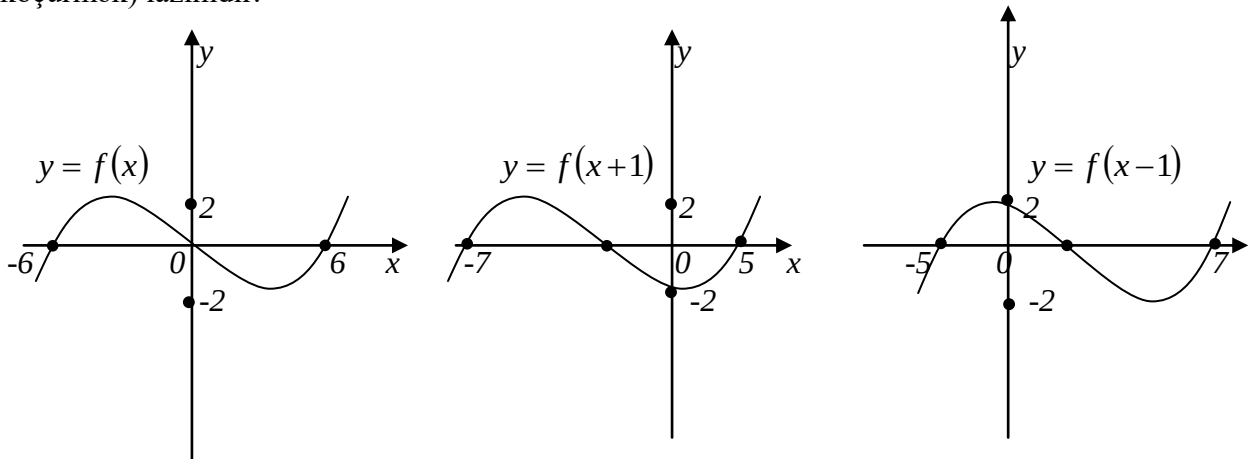
Funksiya qrafiklərinin həndəsi çevrilməsi.

$y = f(x)$ funksiyasının qrafiki məlum olduqda bir neçə müstəvi çevrilmələrin köməyi ilə (paralel köçürmə, ox və mərkəzi simmetriya və s.) daha mürəkkəb şəkilli funksiyaların qrafikini qurmaq olar.

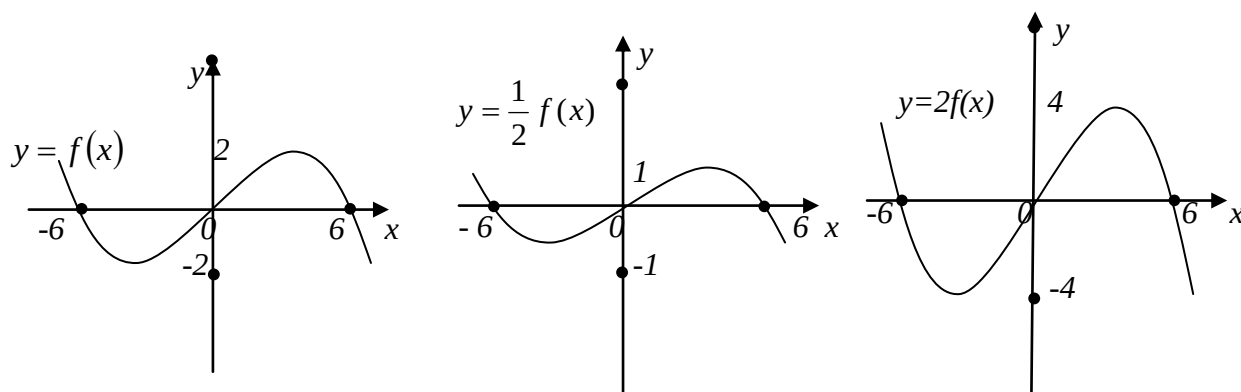
• $f(mx)$ funksiyasının qrafiki $m > 1$ olduqda $f(x)$ funksiyasının qrafikinə absis oxu boyunca m dəfə “sıxılmasından”, $0 < m < 1$ olduqda isə m dəfə “dartılmasından” alınır.



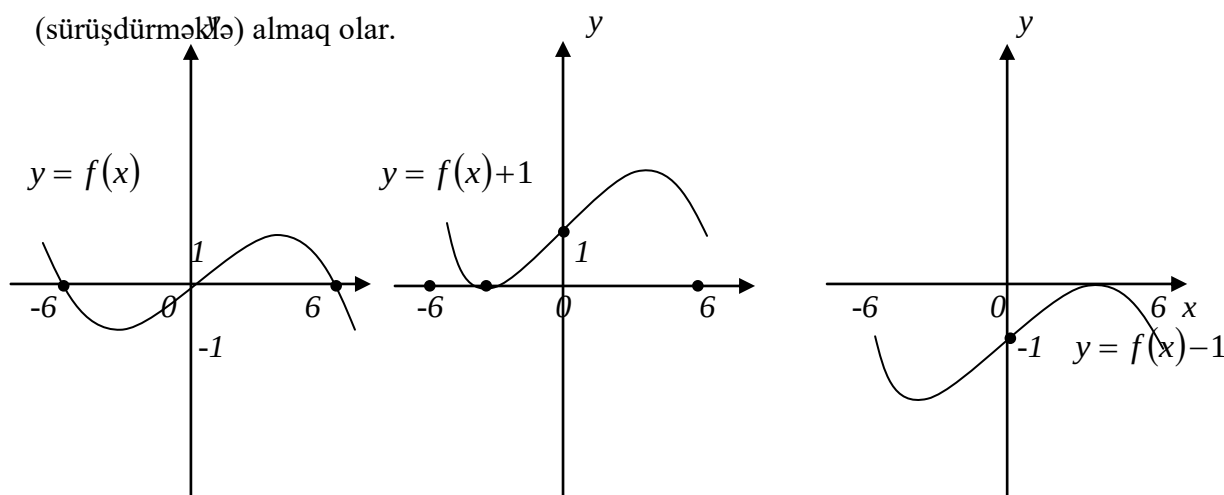
• $f(x+C)$ funksiyasının qrafikini $f(x)$ funksiyasının qrafikindən almaq üçün onu absis oxu boyunca C müsbət olduqda sola, C mənfi olduqda isə sağa C qədər sürüşdürmək (paralel köçürmək) lazımdır.



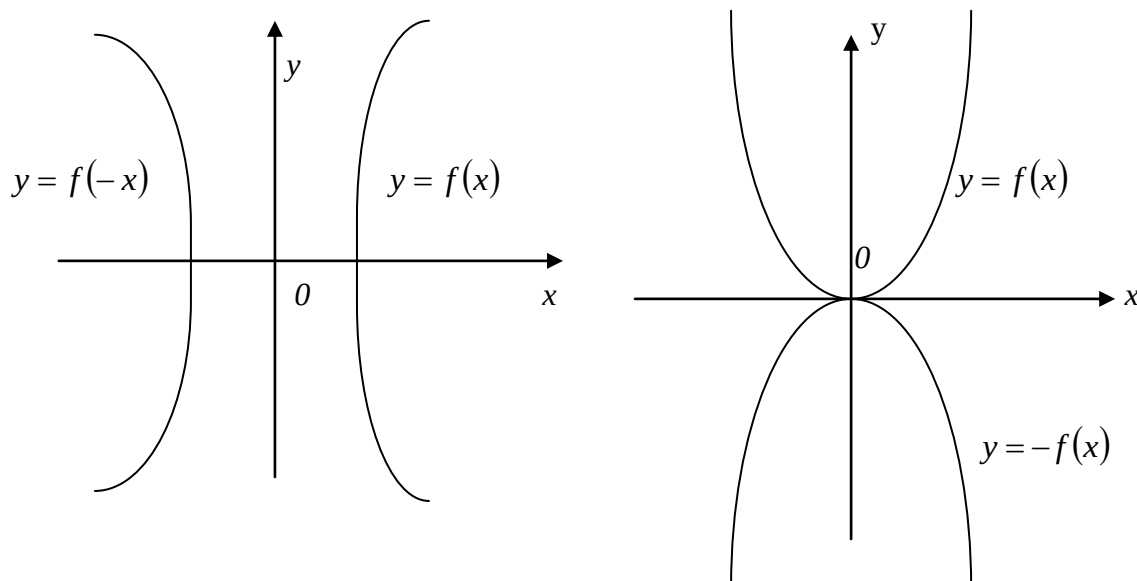
• $nf(x)$ funksiyasının qrafikini $n > 1$ olduqda $f(x)$ funksiyasının qrafikindən almaq üçün onu ordinat oxu boyunca n dəfə “dartmaq”, $0 < n < 1$ olduqda isə n dəfə “sıxmaq” lazımdır.



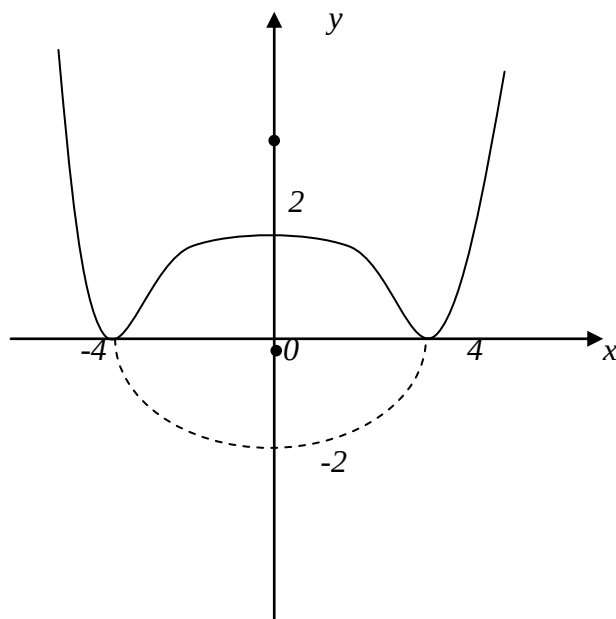
• $f(x) + k$ funksiyasının qrafikini $f(x)$ funksiyasının qrafikindən onu ordinat oxu boyunca $k > 0$ olduqda yuxarı, $k < 0$ olduqda isə aşağı k qədər paralel köçürməklə (sürüşdürməklə) almaq olar.



• $f(-x)$ funksiyasının qrafiki $f(x)$ funksiyasının qrafiki ilə ordinat oxuna, $-f(x)$ funksiyasının qrafiki isə $f(x)$ funksiyasının qrafiki ilə absis oxuna nəzərən simmetrikdir.



- $y = |f(x)|$ funksiyasının qrafikini qurmaq üçün, $y = f(x)$ - in qrafikini qurub, alınmış qrafikin absis oxundan aşağıda qalan hissəsini simmetrik olaraq yuxarı çevirmək lazımdır.



Triqonometrik funksiyaların dövrünün təyini

- Triqonometrik funksiyaların qüvvəti verildikdə, onun dövrü aşağıdakı kimi tapılır.

$$\left. \begin{array}{l} \sin^m(kx+b) \\ \cos^m(kx+b) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} T = \frac{2\pi}{|k|} \quad (m \text{ tək olduqda}) \\ T = \frac{\pi}{|k|} \quad (m \text{ cüt olduqda}) \end{array}$$

Tangens və kotangens funksiyaları üçün

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg}^m(kx+b) \\ \operatorname{ctg}^m(kx+b) \end{array} \right\} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|k|}$$

- a) $f(x) = \operatorname{tg} 5x$ üçün $T = \frac{\pi}{|5|} = \frac{\pi}{5}$
- b) $f(x) = \cos^3(2x+5)$ üçün $T = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

- Triqonometrik funksiyaların cəmi və ya fərqinin periodunu tapmaq üçün hər bir funksiyanın periodu ayrılıqda tapılır və sonra bu periodların ƏKOB-u tapılır.

$f(x) = 2 \cos^3 4x - \sin^2 3x$ funksiyasının dövrünü tapmaq

$$2 \cos^3 4x \text{ funksiyasının dövrü } T_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin^2 3x \text{ funksiyasının dövrü } T_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$T = \partial KOB(T_1, T_2) = \partial KOB\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\partial KOB(\pi; \pi)}{\partial BOB(2; 3)} = \frac{\pi}{1} = \pi$$

- Triqonometrik funksiyaların hasilinin dövrünü tapmaq üçün, hasilin cəmə çevrilməsi düsturundan istifadə edib, hasili cəmə və ya fərqə gətirirlər. Sonra yuxarıda dediyimiz qaydanı tətbiq edirik.

a) $y = \sin 2x \cdot \sin 4x$ funksiyasının dövrünü tapaq.

$$y = \sin 2x \cdot \sin 4x = \frac{\cos 2x - \cos 6x}{2} = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 6x$$

$$\left. \begin{array}{l} T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi \\ T_2 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow T = \partial KOB(T_1, T_2) = \partial KOB\left(\pi; \frac{\pi}{3}\right) = \pi \text{ alınır.}$$

b) $f(x) = \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x + 3$ funksiyasının dövrünü tapaq.

$$f(x) = \sin^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x + 3 = \sin^2 x + \cos^2 x + 3 = 1 + 3 = 4$$

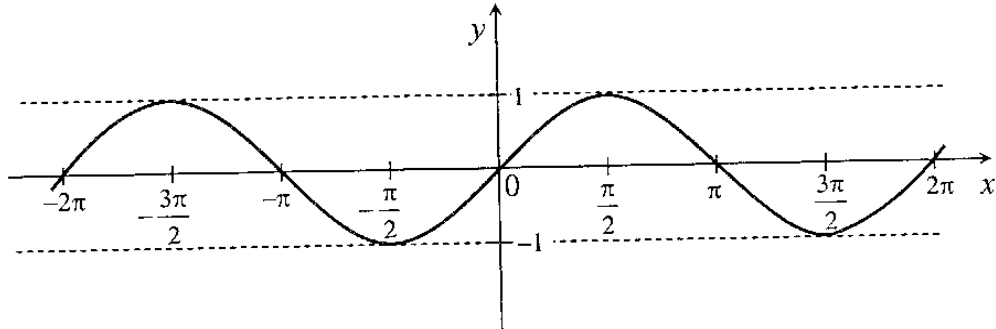
bu isə sabit funksiyadır. Ona görə də dövrü funksiyadır. İstənilən ədəd bu funksiyanın dövrüdür. Ən kiçik müsbət dövrü isə yoxdur.

- $y = x \sin x$; $y = x \pm \cos x$; $y = \operatorname{tg} x^n$ şəklində olan triqonometrik funksiyalar dövrü deyil.

$y = \sin x$ funksiyasının xassələri və qrafiki

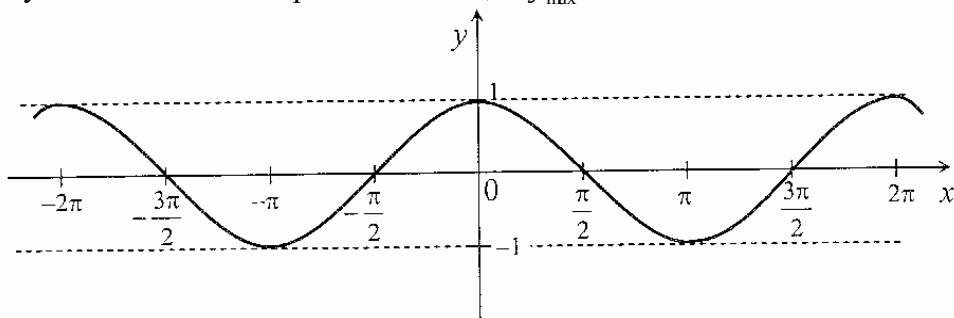
- Təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur: $D(f) = (-\infty; +\infty)$
- Qiymətlər oblastı $E(f) = [-1; 1]$
- Funksiyanın sıfırları: $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$
- Tək funksiyadır. $\sin(-x) = -\sin x$. Onun qrafiki sinusoid adlanır və koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir.
- Dövrü funksiyadır, əsas dövrü $T = 2\pi$ - dir, $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$
- Artma aralıqları: $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$. Çevrə boyunca I və IV rüblərdə artır.
- Azalma aralıqları: $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$. Çevrə boyunca II və III rüblərdə azalır.
- Funksiyanın müsbət olduğu aralıqlar: $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$. Çevrə boyunca I və II rüblərdə müsbətdir.

- Funksiyanın mənfi olduğu aralıqlar: $x \in (-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$. Çevrə boyunca III və IV rüblərdə mənfidir.
- Funksiyanın minimum nöqtələri: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $y_{\min} = -1$
- Funksiyanın maksimum nöqtələri: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$; $y_{\max} = 1$



$y = \cos x$ funksiyasının xassələri və qrafiki

- Təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur: $D(f) = (-\infty; +\infty)$
- Qiymətlər oblastı $E(f) = [-1; 1]$
- Funksiyanın sıfırları: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$
- Cüt funksiyadır. $\cos(-x) = \cos x$. Onun qrafiki kosinusoid adlanır və ordinat oxuna nəzərən simmetrikdir.
- Dövri funksiyadır, əsas dövrü $T = 2\pi$ - dir, $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$
- Artma aralıqları: $x \in [-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$. Çevrə boyunca II və IV rüblərdə artır.
- Azalma aralıqları: $x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k]$. Çevrə boyunca I və III rüblərdə azalır.
- Funksiyanın müsbət olduğu aralıqlar: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$. Çevrə boyunca I və IV rüblərdə müsbətdir.
- Funksiyanın mənfi olduğu aralıqlar: $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$. Çevrə boyunca II və III rüblərdə mənfidir.
- Funksiyanın minimum nöqtələri: $x = \pi + 2\pi k$; $y_{\min} = -1$
- Funksiyanın maksimum nöqtələri: $x = 2\pi k$; $y_{\max} = 1$

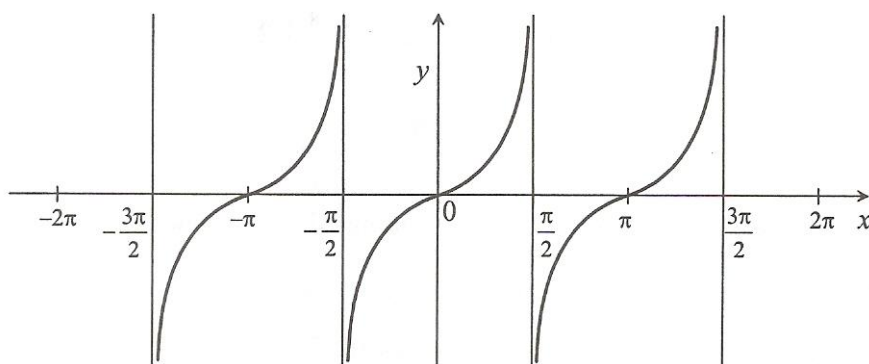


Kosinusiod $\frac{\pi}{2}$ qədər sola sürüşdürülmüş sinusoiddir.

Ordinat oxunun $[-1;1]$ parçasına sinus xətti deyilir

$y = \operatorname{tg} x$ funksiyasının xassələri və qrafiki

- Təyin oblastı: $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, yəni $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ qiymətlərindən başqa x -in bütün qiymətlərində təyin olunub
- Qiymətlər oblastı : $E(f) = (-\infty; +\infty)$. Funksiyanın qiymətlər çoxluğu bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur. Funksiyanın ƏBQ və ƏKQ – i yoxdur.
- Funksiyanın sıfırları: $x = \pi k$
- Tək funksiyadır. $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.
- Dövri funksiyadır, əsas dövrü $T = \pi$ - dir, $\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x$
- Funksiya özünün təyin oblastında artır.
- Funksiya azalmır.
- Funksiyanın müsbət olduğu aralıqlar: $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$. Çevrə boyunca I və III rüblərdə müsbətdir.
- Funksiyanın mənfi olduğu aralıqlar: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$. Çevrə boyunca II və IV rüblərdə mənfidir.



$y = \operatorname{ctg} x$ funksiyasının xassələri və qrafiki

- Təyin oblastı: $D(f) = (\pi k; \pi + \pi k)$, $x = \pi k$ qiymətlərindən başqa x -in bütün qiymətlərində təyin olunub

- Qiymətlər oblastı : $E(f) = (-\infty; +\infty)$. Funksiyanın qiymətlər çoxluğu bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur. Funksiyanın ƏBQ və ƏKQ – i yoxdur.

- Funksiyanın sıfırları: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

- Tək funksiyadır. $ctg(-x) = -ctgx$.

- Dövri funksiyadır, əsas dövrü $T = \pi$ - dir, $ctg(x + \pi k) = ctgx$

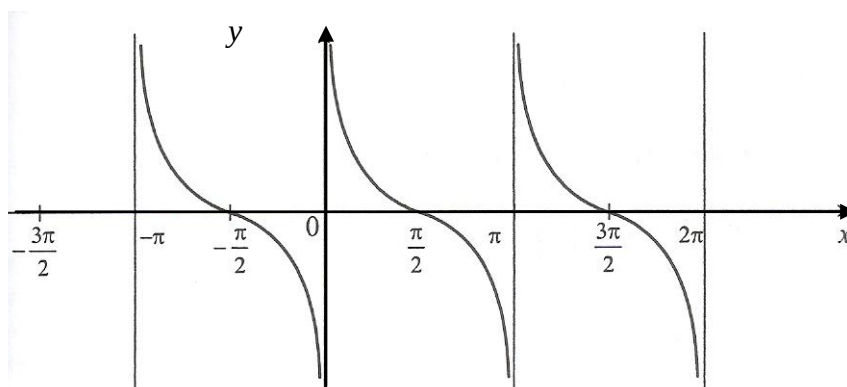
- Funksiya artmır.

- Funksiya təyin oblastında azalır.

- Funksiyanın müsbət olduğu aralıqlar: $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right)$. Çevrə boyunca I və III rüblərdə müsbətdir.

- Funksiyanın mənfi olduğu aralıqlar: $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k \right)$. Çevrə boyunca II və IV rüblərdə mənfidir.

Funksiyanın qrafiki aşağıdakı kimidir.



Misal. Müqayisə edin

a) $tg \frac{\pi}{5}$ və $tg \frac{3}{5}$

tgx artan funksiyadır, onda $tg \frac{\pi}{5} \approx tg \frac{3,14}{5} > tg \frac{3}{5}$

b) $ctg \frac{\sqrt{2}}{4}$ və $ctg \frac{\pi}{4}$

$ctgx$ azalan funksiyadır, $ctg \frac{\sqrt{2}}{4} > ctg \frac{\pi}{4}$

Nöqtənin ətrafı

Verilmiş nöqtəni öz daxilində saxlayan intervala həmin nöqtənin ətrafı deyilir.

$$x_0 \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$
$$x_0 - \delta < x_0 < x_0 + \delta$$

$x_0 - \delta$ və $x_0 + \delta$ x_0 nöqtəsinin sol və sağ ətraflarıdır.

Funksiyanın artımı.

Tutaq ki, x və x_0 sərbəst dəyişənin iki qiymətidir.

$x - x_0$ fərqi sərbəst dəyişənin və ya argumentin artımı deyilir.

$$\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x$$

Argument artım aldığıda funksiya da artım alır.

$$\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0)$$

Misal. $f(x) = x^2$ $x_0 = 2$ $x = 1,9$ olarsa, $\Delta x = ?$ $\Delta y = ?$

$$\Delta x = x - x_0 = 1,9 - 2 = -0,1$$

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = (1,9)^2 - 2^2 = 3,84 - 4 = -0,16$$

Funksiyanın törəməsi.

Argumentin artımı sıfıra yaxınlaşdıqda funksiya artımının argument artımına olan nisbətinin limitinə funksiyanın x_0 nöqtəsində törəməsi deyilir.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Nöqtədə törəməsi olan funksiya həmin nöqtədə diferensiallanan funksiya deyilir. Funksiyanın törəməsinin tapılmasına diferensiallama deyilir. Funksiyanın törəməsi həmin funksiyanın dəyişmə sürəti deməkdir.

Törəmənin hesablama qaydaları.

1. Sabitin törəməsi sıfıra bərabərdir.

$$3' = 0 \quad (-7,3)' = 0$$

2. Argumentin (sərbəst dəyişənin) törəməsi 1-ə bərabərdir.

$$x' = 1$$

3. Sabit ədədi törəmə işarəsi xaricinə çıxartmaq olar.

$$(3x)' = 3 \cdot x' = 3 \cdot 1 = 3$$

4. Cəmin (fərqin) törəməsi törəmələrin cəminə (fərqinə) bərabərdir.

$$(u + v)' = u' + v' \quad \text{və} \quad (u - v)' = u' - v'$$

5. Hasilın törəməsi

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

Bu düstura Leybnis düsturu deyilir.

6. Kəsrin törəməsi belə tapılır.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \text{ həm də } v \neq 0$$

7. Qüvvət funksiyasının törəməsi

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \cdot x'$$

8. Kvadrat kökün törəməsi bərabərdir: kökaltı ifadənin törəməsi bölünsün kökün iki misli

$$(\sqrt{x})' = \frac{x'}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

9. Başqa köklərin törəməsini tapmaq üçün əvvəlcə onu qüvvət kimi yazıb, sonra onun törəməsini almaq lazımdır.

10. Sinusun törəməsi

$$\sin' x = \cos x \cdot x'$$

11. Kosinusun törəməsi

$$\cos' x = -\sin x \cdot x'$$

12. Tangensin törəməsi

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot x'$$

13. Kotangensin törəməsi

$$\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot x'$$

a) $(2x^2 + 5x)' = (2x^2)' + (5x)' = 4x + 5$

b) $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$

c) $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

d) $\left(\frac{4}{5x+2}\right)' = \frac{4' \cdot (5x+2) - (5x+2)' \cdot 4}{(5x+2)^2} = \frac{-20}{(5x+2)^2}$

● Funksiyanın törəməsinin törəməsinə onun 2-ci törəməsi deyilir. Yüksəktərtibli törəmələr $y'', y''', y^{(v)}, y^{(v)}, y^{(v)}$ kimi işarə olunur.

$$a) (x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 7)^{IV} = (4x^3 - 9x^2 - 10x)^{III} = (12x^2 - 18x - 10)^{II} = (24x - 18)^I = 24$$

$$b) (x^4 - 3x^2 - 2)^{II} = (4x^3 - 6x)^I = 12x^2 - 6$$

Tərs funksiyanın törəməsi

Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası $(a; b)$ aralığında kəsilməz funksiya və onun $f'(x)$ törəməsi sıfırdan fərqlidir. Bu zaman verilmiş funksiyanın tərs funksiyanın törəməsi var və aşağıdakı kimidir.

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Misal. a) $f(x) = \sqrt{2x-3}$ funksiyanın tərs funksiyanın törəməsini tapın.

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{(2x-3)^I}{2\sqrt{2x-3}}} = \frac{1}{\frac{2}{2\sqrt{2x-3}}} = \sqrt{2x-3} = y$$

b) $f(x) = \sqrt{x-5}$ funksiyanın tərs funksiyanın törəməsini tapın.

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{(\sqrt{x-5})^I}{2\sqrt{x-5}}} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x-5}}} = 2\sqrt{x-5} = 2y$$

Tərs triqonometrik funksiyların törəməsi

$$1) (\arcsin x)^I = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x'$$

$$3) (\arctg x)^I = \frac{1}{1+x^2} \cdot x'$$

$$2) (\arccos x)^I = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x'$$

$$4) (\text{arcctg} x)^I = -\frac{1}{1+x^2} \cdot x'$$

Misal.

$$a) (\arcsin \sqrt{x-3})^I = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x-3})^2}} \cdot (\sqrt{x-3})^I = \frac{1}{\sqrt{1-x+3}} \cdot \frac{(x-3)^I}{2\sqrt{x-3}} = \frac{1}{\sqrt{4-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-3}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(x-3)(4-x)}}$$

$$b) (\text{arcctg} x^5)^I = -\frac{1}{x^{10}+1} \cdot (x^5)^I = -\frac{5x^4}{x^{10}+1}$$

Üstlü funksiyanın törəməsi

1) $y = e^x$ funksiyanın eksponent funksiya deyilir.

$$(e^x)^I = e^x \cdot x'$$

$$(e^{-4x})' = e^{-4x} \cdot (-4x)' = -4e^{-4x}$$

2) $y = a^x$ üstlü funksiyanın törəməsi aşağıdakı kimi tapılır.

$$(a^x)' = a^x \ln a \cdot x'$$

$$a) (3^{-x^2+1})' = 3^{-x^2+1} \ln 3 (-x^2+1)' = -2x \cdot 3^{-x^2+1} \ln 3$$

$$b) f(x) = \left(\frac{2^x}{e^x + 1} \right)' = \frac{(2^x)'(e^x + 1) - (e^x + 1)' \cdot 2^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2^x \ln 2 (e^x + 1) - e^x \cdot 2^x}{(e^x + 1)^2} =$$

$$= \frac{2^x ((e^x + 1) \ln 2 - e^x)}{(e^x + 1)^2}$$

Loqarifmik funksiyanın törəməsi

$$1) (\ln x)' = \frac{1}{x} \cdot x'$$

$$\text{Misal. } \ln'(2x^2 + 4x) = \frac{1}{2x^2 + 4x} \cdot (2x^2 + 4x)' = \frac{4x + 4}{2x^2 + 4x} = \frac{2(2x + 2)}{2(x^2 + 2x)} = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x}$$

$$2) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \cdot x'$$

$$\text{Misal. } \log_7'(2x) = \frac{1}{2x \ln 7} \cdot (2x)' = \frac{2}{2x \ln 7} = \frac{1}{x \ln 7}$$

Qüvvət funksiyanının törəməsi

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\text{Misal. } (x^{\lg 3})' = \lg 3 \cdot x^{\lg 3-1} = \lg 3 \cdot x^{\lg 3-\lg 10} = \lg 3 \cdot x^{\lg 0,3}$$

$$b) \left(\sqrt[3]{x^2 + 2} \right)' = \left[(x^2 + 2)^{\frac{1}{3}} \right]' = \frac{1}{3} \cdot (x^2 + 2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + 2)' = \frac{2x + 1}{3\sqrt[3]{(x^2 + 2)^2}}$$

Mürəkkəb funksiya və onun törəməsi.

Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiya verilib. Fərz edək ki, $x = g(z)$. Onda

$$y = f(g(z))$$

alırıq.

Verilmiş funksiyanın arqumentinin özü başqa bir dəyişmənin funksiyası olarsa, belə funksiya mürəkkəb funksiya və ya funksiyanın funksiyası deyilir.

Mürəkkəb funksiyanın törəməsi bərabərdir: funksiyanın törəməsi vurulsun arqumentin törəməsi.

$$a) \left[(3x^3 + 4x^2 - 2)^{100} \right]' = 100(3x^3 + 4x^2 - 2)^{99} \cdot (3x^3 + 4x^2 - 2)' =$$

$$= 100(3x^3 + 4x^2 - 2)^{99} \cdot (9x^2 + 8x) = (900x^2 + 800x)(3x^3 + 4x^2 - 2)^{99}$$

$$b) (\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot (\sin x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$ç) [\sin^3(4x+5)]' = 3 \sin^2(4x+5) \cdot [\sin(4x+5)]' = 3 \sin^2(4x+5) \cos(4x+5) \cdot (4x+5)' = \\ = 12 \sin^2(4x+5) \cos(4x+5)$$

$$e) [tg^3(5x^2+5)]' = 3tg^2(5x^2+5) \cdot [tg(5x^2+5)]' = 3tg^2(5x^2+5) \cdot \frac{(5x^2+5)'}{\cos^2(5x^2+5)} = \\ = \frac{30xtg^2(5x^2+5)}{\cos^2(5x^2+5)}$$

Misal: $f(x) = 2x + 3$ və $g(x) = x^2 - 2x + 2$ funksiyaları verilmişdir. $g(f(x-1)) = ?$ komporisiyasını qurun.

$$f(x-1) = 2(x-1) + 3 = 2x - 2 + 3 = 2x + 1$$

$$g(f(x-1)) = (2x+1)^2 - 2(2x+1) + 2 = 4x^2 + 4x + 1 - 4x - 2 + 2 = 4x^2 + 1$$

Misal: $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x} + 1$ funksiyaları verilib. $g(f(-2)) = ?$

Həlli.

$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$

$$g(f(-2)) = g(4) = \sqrt{4} + 1 = 2 + 1 = 3$$

Misal: $f(x) = 2x^3 + 3x + 1$ və $g(x) = 3x - 2$ olarsa, $f(g(x)) = ?$

$$f(g(x)) = 2(3x-2)^2 + 3(3x-2) + 1 = 2(9x^2 - 12x + 4) + 9x - 6 + 1 = \\ = 18x^2 - 24x + 8 + 9x - 6 + 1 = 18x^2 - 13x + 3$$

$$g(f(x)) = 3(2x^3 + 3x + 1) - 2 = 6x^3 + 9x + 3 - 2 = 6x^3 + 9x + 1$$

Misal: $f(x) = x \cdot f(x-1) + 3$ olduğu məlumdur. $f(1)$ -i tapın.

$$x = 0 \text{ olarsa, } f(0) = 0 \cdot f(0-1) + 3 = 0 \cdot f(-1) + 3 = 3$$

$$x = 1 \text{ olarsa, } f(1) = 1 \cdot f(1-1) + 3 = 1 \cdot f(0) + 3 = 1 \cdot 3 + 3 = 6$$

$$\bullet \quad |x|' = \frac{x}{|x|} \quad |f(x)|' = f'(x) \cdot \frac{f(x)}{|f(x)|}$$

Funksiyanın artması və azalması aralıqları

1) Funksiyanın törəməsi hansı aralıqda müsbətdirsə, həmin aralıqda funksiya artır.

2) Funksiyanın törəməsi hansı aralıqda mənfidirsə, həmin aralıqda funksiya azalır.

Deməli, funksiyanın artma, azalma aralıqlarını tapmaq üçün $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ bərabərliklərini həll etmək lazımdır.

QEYD. $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ bərabərsizliyini həll etmək üçün ümumiləşmiş intervallar üsulundan (Darbu teoremindən) istifadə etmək əlverişlidir.

Funksiyanın törəməsinin olmadığı və ya sıfıra bərabər olduğu nöqtələr onun təyin oblastını elə aralıklara bölür ki, bunların hər birində funksiyanın işarəsi sabit olur.

Funksiyanın artma- azalma aralıqlarının tapılması üçün ümumi qayda:

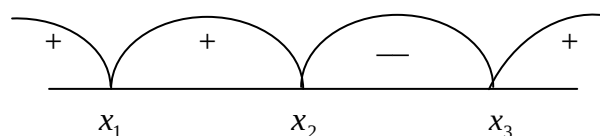
1) funksiyanın təyin oblastı tapılır. $D(f)$

2) funksiyanın törəməsi tapılır. $f'(x)$

3) törəmənin sıfıra bərabər olduğu və törəmənin təyin olmadığı nöqtələr tapılır. $f'(x) = 0$

4) Ədəd oxu bu nöqtələrlə bölünür.

5) Törəmənin aralıqda işarəsi təyin edilir.



6) Həmin nöqtələrdə funksiyanın kəsilməzliyi yoxlanılır.

7) Kəsilməz olduğu nöqtələr artma və ya azalma aralığına daxil edilir.

8) Artma aralığı funksiyanın törəməsinin müsbət qiymətlərinə, azalma aralığı isə törəmənin mənfi qiymətlərinə uyğun gəlir.

a) $f(x) = 3x - 0,5$

b) $f(x) = 5 - 2x$

c) $f(x) = -2x^2 + 3x + 4$

$D(f) = R$, kəsilməzdir

$D(f) = R$, kəsilməzdir

$D(f) = R$, kəsilməzdir

$f'(x) = 3 > 0$

$f'(x) = -2 < 0$

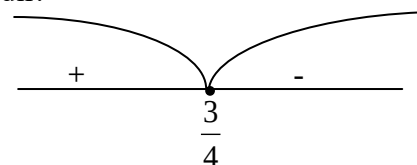
$f'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 3 = 0 \Rightarrow$

həmişə artır

həmişə azalır

$\Rightarrow x = \frac{3}{4}$ və bu nöqtədə

kəsilməzdir.



$\left(-\infty; \frac{3}{4}\right]$ artır, $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$ - da azalır.

d) $f(x) = |3x - 1|$

$D(f) = R$

$$|3x - 1| = \begin{cases} 3x - 1, & x > \frac{1}{3} \\ -(3x - 1), & x < \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3, & x > \frac{1}{3} \\ -3, & x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

$x = \frac{1}{3}$ nöqtəsində funksiya kəsilməzdir. Onda funksiya $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$ aralığında artır. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$ aralığında azalır.

e) $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = (2x)' + (x^{-2})' = 2 - \frac{2}{x^2}$ $x = 0$ olduqda törəmə yoxdur. $2 - \frac{2}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1$. Deməli,

$(-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$ - da artır; $(0; 1]$ - də isə azalır.



Funksiyanın böhran nöqtələri

❖ $f'(x_0) = 0$ bərabərliyi ödəyən x_0 nöqtəsinə $f(x)$ - in stasionar nöqtəsi deyilir.

❖ Funksiyanın törəməsinin olmadığı və sıfıra bərabər olduğu nöqtələrinə onun böhran nöqtələri deyilir.

Misal: a) $f(x) = x^3 - 4x + 8$ - in böhran nöqtəsini tapın.

$$f'(x) = (x^3 - 4x + 8)' = 3x^2 - 4$$

$$3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

b) $f(x) = 3x - 7$ xətti funksiyanın böhran nöqtələrini tapın.

$$f'(x) = (3x - 7)' = 3$$

$3 \neq 0$. Deməli, böhran nöqtəsi yoxdur.

c) $f(x) = \operatorname{tg} x$

$$f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow 0 \neq 1 \text{ böhran nöqtəsi yoxdur.}$$

d) $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ - nın böhran nöqtəsini tapın.

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 2}{x^3}; \frac{2x^3 - 2}{x^3} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 2 = 0 \Rightarrow 2x^3 = 2 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

Digər tərəfdən $x = 0$ olduqda məxrəc sıfır olur. Deməli, sıfırda törəmə yoxdur. Ona görə də verilmiş funksiyanın böhran nöqtəsi 0 və 1 – dir.

❖ Böhran nöqtələrində funksiyanın qrafikinə toxunan ya absis oxuna paraleldir ($f'(x) = 0$ olan nöqtələr); ya da absis oxuna perpendikulyardır və ya toxunan yoxdur. (törəmənin olmadığı nöqtələr)

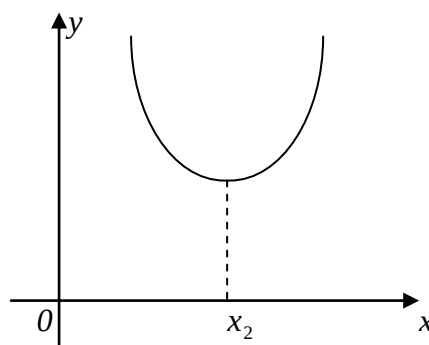
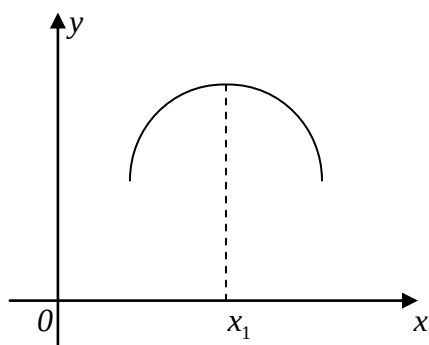
Funksiyanın maksimum və minimum nöqtələri

1) x_0 nöqtəsində törəmə öz işarəsini müsbətdən mənfiyə dəyişərsə, onda x_0 maksimum nöqtədir.

2) x_0 nöqtəsində törəmə öz işarəsini mənfidən müsbətə dəyişərsə, onda x_0 minimum nöqtədir.

x_1 - maksimum nöqtədir.

x_2 - minimum nöqtədir.



Qeyd. Funksiyanın minimumu həmişə maksimumundan kiçik olmalıdır.

- ❖ Funksiyanın maksimum və minimum nöqtələrinə onun ekstremum nöqtələri deyilir.
- ❖ Funksiyanın maksimum nöqtəsində aldığı qiymətinə onun maksimumu, minimum nöqtəsində aldığı qiymətinə isə onun minimumu deyilir.
- ❖ Funksiyanın maksimum və minimuma onun ekstremumları deyilir.
- ❖ Yuxarıdakı 1 və 2 təklifləri ekstremumun varlığı üçün kafi şərt adlanır.
- ❖ Ekstremumun zəruri şərti isə Ferma teoremi ilə ifadə olunur. Bu teoremə görə “ x_0 nöqtəsi funksiyanın ekstremum nöqtəsidirsə və bu nöqtədə törəmə varsa sıfıra bərabərdir” Bu teoremin tərsi doğru deyil, yəni törəmənin sıfır olduğu nöqtədə funksiyanın ekstremumu olmaya bilər. Odur ki, Ferma teoremi ekstremum üçün zəruri şərt adlanır.

❖ $f(x) = |x|$ funksiyasının sıfır nöqtəsində törəməsi yoxdur. Deməli, sıfır böhran nöqtəsidir. Həm də sıfır minimum nöqtədir.

Misl. a) $f(x) = |x - 4|$

$$f(x) = \begin{cases} x - 4, & x \geq 4 \\ -(x - 4), & x < 4 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 4 \\ -1, & x < 4 \end{cases}$$

$x = 4$ nöqtəsində funksiyanın törəməsi olmadığından böhran nöqtəsidir.

b) $f(x) = \sqrt{x - 5}$

Bu funksiya üçün $D(f) = [5; +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-5}} \quad x=5 \text{ nöqtəsində törəmə yoxdur, lakin } x=5 \text{ nöqtəsi funksiyanın təyin}$$

oblastına daxil olsa da, onun daxili nöqtəsi deyil və deməli, böhran nöqtəsi də deyil. Bu funksiyanın böhran nöqtəsi yoxdur.

$$c) f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 4x + 2 \quad D(f) = R$$

$$f'(x) = 9x^2 - 6x + 4$$

$$f'(x) = 0, \quad D < 0 \text{ olduğundan funksiyanın böhran nöqtələri yoxdur.}$$

$$ç) f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$D(f) = R, \quad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad x=0 \text{ nöqtəsində funksiyanın törəməsi yoxdur.}$$

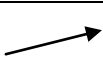
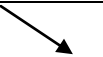
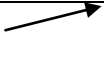
Lakin bu nöqtə funksiyanın təyin oblastının daxili nöqtəsi olduğundan, funksiyanın böhran nöqtəsidir. Bu nöqtə ətrafında törəmənin işarəsi dəyişmədiyindən ekstremum nöqtəsi deyil.

$$d) f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2 \text{ funksiyanın ekstremumlarını tapın.}$$

$$D(f) = R, \quad f'(x) = (3x^5 - 5x^3 + 2)' = 15x^4 - 15x^2$$

$$15x^4 - 15x^2 = 0$$

$$15x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0; x = 1; x = -1.$$

X	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	—	0	—	0	+
$f(x)$		4		2		0	
		$\max$				$\min$	

$$x_{\min} = 1$$

$$x_{\max} = -1$$

$$y_{\min} = 0$$

$$y_{\max} = 4$$

$(0; 2)$ nöqtəsi nə maksimum, nə də minimum nöqtədir.

Funksiya $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ - da artır.

$$[-1; 0] \cup [0; 1] \Rightarrow [-1; 1] \quad - \text{də azalır.}$$

Funksiyanın ən böyük və ən kiçik qiymətləri

Funksiyanın parçada ən böyük və ən kiçik qiymətini tapmaq üçün

1) funksiyanın törəməsini tapmaq

2) funksiyanın böhran nöqtələrini tapmaq

3) funksiyanın verilmiş parçaya daxil olan böhran nöqtələrində və parçanın uclarında qiymətini hesablamaq, alınmış ədədlərdən ən böyüyünü və ən kiçiyini seçmək lazımdır.

Misal. a) $f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x + 1$ funksiyasının $[-2; 0]$ parçasında ən böyük və ən kiçik qiymətini tapın.

$$1) f'(x) = (x^3 - 1,5x^2 - 6x + 1)' = 3x^2 - 3x - 6$$

$$2) 3x^2 - 3x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \text{ və ya } x_2 = -1$$

$$2 \notin [-2; 0] \text{ və } -1 \in [-2; 0]$$

$$f(-1) = -1 - 1,5 + 6 + 1 = 4,5$$

$$f(-2) = -8 - 6 + 12 + 1 = -1$$

$$f(0) = 1$$

$$\max_{[-2; 0]} f(x) = f(-1) = 4,5$$

$$\min_{[-2; 0]} f(x) = f(-2) = -1$$

Misal. a) 20 ədədini mənfi olmayan elə iki ədədin cəmi şəklində göstərin ki, bu ədədlərin kvadrları cəmi ən kiçik olsun.

Həlli

Ədədlərdən biri x olsun. Onda o birisi ədəd $(20 - x)$ olar. Onda məsələ $[0; 20]$ parçasında $f(x) = x^2 + (20 - x)^2$ funksiyasının ən kiçik qiymətinin tapılmasına gətirilir.

$$1) f'(x) = 2x + 2(20 - x)(20 - x)' = 2x - 40 + 2x = 4x - 40$$

$$2) 4x - 40 = 0 \Rightarrow 4x = 40 \Rightarrow x = 10. \text{ Bu qiyməti } 20 - x = 20 - 10 = 10 \text{ olar. Deməli, } 20 = 10 + 10$$

b) Özünün kvadratı ilə cəmi ən kiçik olan ədədi tapın.

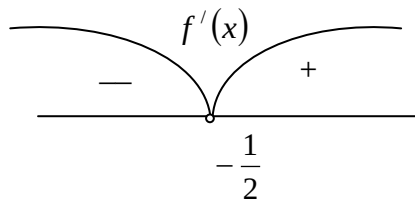
Axtarılan ədədi x ilə işarə edək. Onda

$$f(x) = x + x^2$$

$$f'(x) = 1 + 2x = 0$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$



Deməli $-\frac{1}{2}$ minimum nöqtədir.

❖ Dairə daxilinə çəkilmiş bərabəryanlı üçbucaqlar içərisində sahəsi ən böyük olan bərabərtərəfli üçbucaqdır.

❖ Diaqonalı verilmiş düzbucaqlılar içərisində sahəsi ən böyük olan düzbucaqlı kvadrattır.

❖ Sahəsi verilmiş düzbucaqlılar içərisində perimetri ən kiçik olan kvadrattır.

❖ Radiusu verilmiş çevrələrin içərisində sahəsi ən böyük olan düzbucaqlı kvadrattır.

Funksiyanın asimptotları

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ və ya $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ olarsa, $y = b$ düz xəttinə $y = f(x)$ funksiyanın üfüqi asimptotu deyilir. Həndəsi olaraq bu o deməkdir ki, x – in sonsuz böyük qiymətlərində funksiyanın qrafiki $y = b$ düz xəttinə sonsuz yaxınlaşır.

2) Əgər $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$) olarsa, onda $x = a$ düz xəttinə $f(x)$ funksiyanın şaquli asimptotu deyilir.

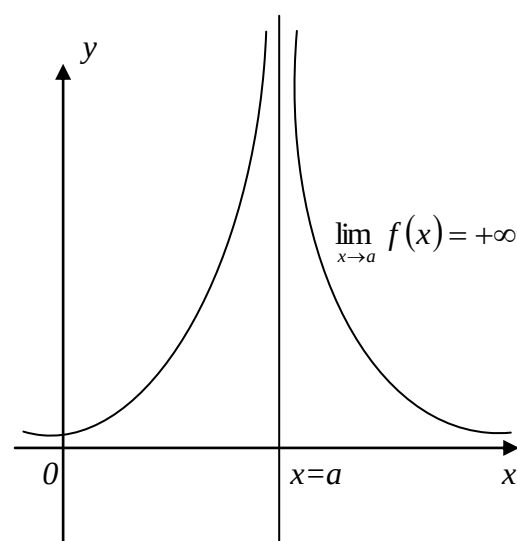
3) Əgər $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$ olarsa, $y = kx + b$ düz xəttinə $y = f(x)$ funksiyanın $x \rightarrow +\infty$ olduqda maili asimptotu deyilir, burada

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$$

Rasional funksiyanın sürətinin dərəcəsi məxrəcinin dərəcəsindən bir vahid böyük olarsa, onda bu funksiyanın maili asimptotu var.

Misal 1. $f(x) = \frac{5x^2 - 3}{9 + 2x^2}$ funksiyanın qrafikinə $x \rightarrow +\infty$ olduqda üfüqi asimptotunu tapaq.



$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3}{9 + 2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{3}{x^2}}{\frac{9}{x^2} + 2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Cavab: $y = 2,5$ düz xətti bu funksiyanın üfüqi asimptotudur.

2) $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 3x + 2}$ funksiyanın qrafikinə şaquli asimptotunun $x = 1$ düz xətti olduğunu isbat edin.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{3}{0} = +\infty$$

3) $f(x) = \frac{3x^3 - x^2 + 5}{x^2 - x + 1}$ funksiyanın $x \rightarrow +\infty$ şərtində maili asimptotunu tapın.

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - x^2 + 5}{x^2 - x + 1} : x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - x^2 + 5}{x^3 - x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 3$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3 - x^2 + 5}{x^2 - x + 1} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2$$

Beləliklə, $k = 3, b = 2$ olduğu üçün cavab $y = 3x + 2$ olur.

Funksiyanın tədqiqi

Funksiyanın qrafikinə qurulmasına onun tədqiqindən başlamaq əlverişlidir. Tədqiq etmə isə verilmiş funksiya üçün aşağıdakıları tapmaqdan ibarətdir.

- 1) təyin oblastını
- 2) təkliyini və ya cütlüyünü
- 3) funksiyanın dövriliyini araşdırmalı
- 4) funksiya qrafikinə koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtəsini tapmalı
- 5) funksiyanın kəsilmə nöqtələrini (əgər varsa) tapmalı
- 6) funksiyanın işarəsini saxladığı aralıqları müəyyən etməli

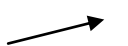
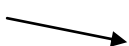
Bunun üçün 4) və 5) mərhələlərində tapılmış nöqtələri absis oxunda qeyd edib, alınan aralıqların hər birində funksiyanın işarəsini tapmalı

- 7) funksiya qrafikinə asimptotlarını tapmalı
- 8) funksiyanın artma və azalma aralıqlarını tapmalı
- 9) funksiyanın törəməsini tapmalı
- 10) funksiyanın böhran nöqtələrini və ekstremum nöqtələrini tapmalı
- 11) tədqiq etmədən sonra funksiyanın qrafikini qurmaq lazımdır.

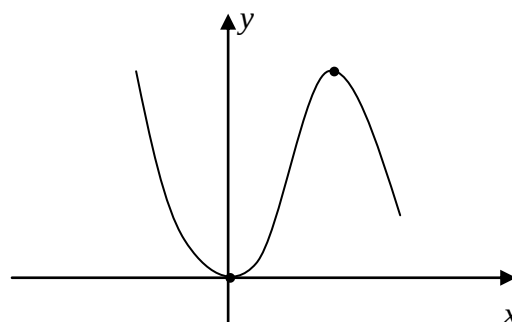
Misal. $f(x) = 3x^2 - x^3$ funksiyanı tədqiq edin və qrafikini qurun.

Həlli

- 1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$
- 2) $f(-x) = 3(-x)^2 - (-x)^3 = 3x^2 + x^3$ nə tək, nə də cütdür
- 3) absis oxu ilə kəsişmə nöqtəsi ordinat oxu ilə kəsişmə nöqtəsi
 $y = 0 \Rightarrow 3x^2 - x^3 = 0$ $x = 0 \Rightarrow y = 0$
 $(0;0)$ və ya $(3;0)$ $(0;0)$ olur
- 4) $f'(x) = (3x^2 - x^3)' = (3x^2)' - (x^3)' = 6x - 3x^2$
- 5) $6x - 3x^2 = 0$
 $3x(2 - x) = 0$
 $x = 0 \quad x = 2$

X	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	—	0	+	0	—
$f(x)$		0		4	
		$\min$		$\max$	

Funksiya $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ - da artır
 $(0; 2)$ - də azalır.



Funksiyanın qrafikinə toxunanın tənliyi

Funksiyanın qrafikinə hər hansı nöqtədə toxunanın tənliyini yazmaq üçün

- 1) funksiyanın törəməsini tapmaq
- 2) verilən nöqtədə törəmənin qiymətini hesablamaq
- 3) verilən nöqtədə funksiyanın qiymətini tapmaq
- 4) alınmış qiymətləri toxunanın aşağıdakı tənliyində yerinə yazmaq

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Misal. $y = x^2 + 5x$ funksiyaının qrafikinə absisi $x_0 = 1$ olan nöqtədə toxunanın tənliyini yazın.

$$1) y' = (x^2 + 5x)' = 2x + 5$$

$$2) y'(1) = 2 \cdot 1 + 5 = 7$$

$$3) y(1) = 1^2 + 5 \cdot 1 = 1 + 5 = 6$$

$$y = 6 + 7(x - 1) = 6 + 7x - 7 = 7x - 1 \Rightarrow y = 7x - 1$$

Törəmənin həndəsi mənası

❖ Funksiyanın törəməsi funksiyanın qrafikini göstərən əyriyə çəkilmiş toxunanın absis oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucağın tangensinə- toxunanın bucaq əmsalına bərabərdir.

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$$

❖ Funksiyanın Ox oxu ilə hansı bucaq əmələ gətirdiyini tapmaq üçün

$$1) \text{ funksiya sıfıra bərabər edilir: } f(x_0) = 0$$

$$2) \text{ funksiyanı sıfıra çevirən qiymətində toxunanın bucaq əmsalı tapılır.}$$

$$k = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

❖ $f(x)$ funksiyasının qrafikinə OY oxu ilə əmələ gətirdiyi bucaq $f(x)$ funksiyasının qrafikinə $x_0 = 0$ nöqtəsində şəkilən toxunanın OY oxu ilə əmələ gətirdiyi bucaqdır. $f(x)$ funksiyasının $(0; f(0))$ nöqtəsində çəkilən toxunan OX oxu ilə əmələ gətirdiyi bucağı α , OY oxu ilə əmələ gətirdiyi bucağı β ilə işarə edək.

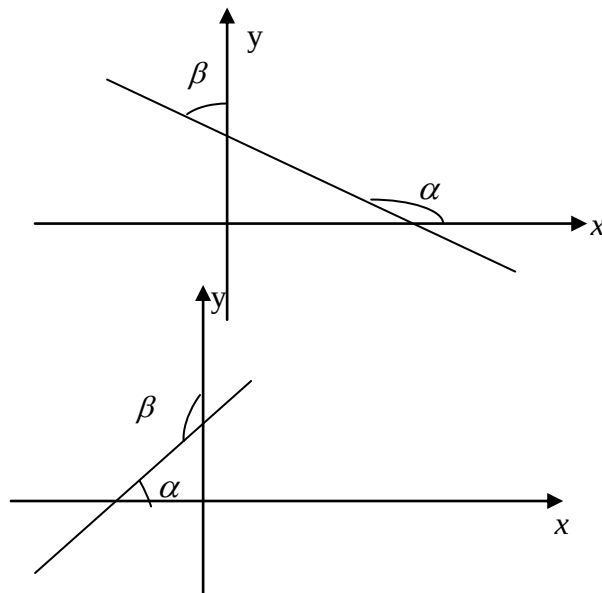
α kor bucaq olarsa

$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

α iti bucaq olarsa

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

Misal. $y = x^2 + 5x$ funksiyasının qrafikinə absisi $x_0 = 1$ olan nöqtədə çəkilən toxunanın bucaq əmsalını tapın.



$$k = f'(x_0) = (x^2 + 5x)' = 2x + 5 = 2 \cdot 1 + 5 = 7$$

Misal. $f(x) = x^2 - x$ funksiyasının qrafiki absis oxunu hansı bucaq altında kəsir?

$$1) f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ və ya } x = 1$$

$$2) k = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha. \text{ Buradan } f'(x_0) = (x^2 - x)' = 2x - 1.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 2x - 1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \quad \text{və ya} \quad \operatorname{tg} \alpha = 2x - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 1$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

Deməli $y = x^2 - x$ əyrisi absis oxunu 135° və 45° - li bucaq altında kəsir.

Misal. $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ funksiyasının qrafiki ordinat oxu ilə hansı bucaq altında kəşir?

$$f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow f'(x) = -2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$f'(0) = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(0) = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\alpha - \text{iti bucaq olduğundan } \beta = \alpha + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

Misal. $y = \frac{1}{2}x^2$ və $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$ funksiyasının qrafikləri hansı bucaq altında kəsişir?

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}(x-2)^2 \Rightarrow x_0 = 1$$

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad f_1'(x_0) = x_0, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2, \quad f_2'(x_0) = x_0 - 2; \quad \operatorname{tg} \alpha = -1 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{3\pi}{4}$$

$$\alpha = (\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\pi}{2}$$

❖ İki əyri arasındakı bucaq onların kəsişmə nöqtələrində onlara çəkilən toxunanlar arasındakı bucağı deyilir.

Misal. $y = 2x + 1$ düz xəttinə paralel olan və $y = x^2$ parabolasına toxunan düz xəttin tənliyini tapın.

Məlumdur ki,

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Şərtə görə düz xətt $y = 2x + 1$ -ə paralel olmalıdır, deməli $k = 2$ olmalıdır. Törəmənin həndəsi mənasına görə

$$k = f'(x_0) = (x^2)' = 2x_0$$

Burada $k = 2$ qiymətini yerinə qoysaq

$$2x_0 = 2 \Rightarrow x_0 = 1$$

$$f(x_0) = f(1) = x_0^2 = 1^2 = 1$$

$$f'(x_0) = f'(1) = 2x_0 = 2 \cdot 1 = 2$$

Bu qiymətləri toxunanın tənliyində yerinə yazsaq

$$y = 1 + 2(x - 1) = 1 + 2x - 2 = 2x - 1$$

Törəmənin fiziki mənası

1) Koordinatın zamana görə törəməsi sürətdir.

$$x'(t) = s'(t) = v$$

2) Sürətin zamana görə törəməsi təcildir.

$$v'(t) = a$$

Deməli, koordinatın zamana görə 2- ci tərtib törəməsi təcildir.

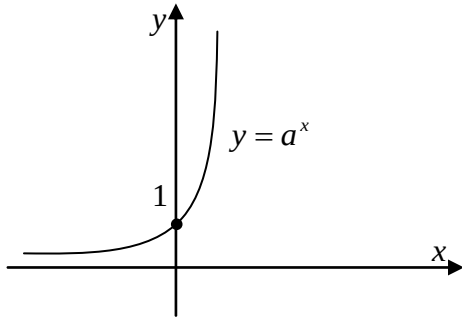
$$x''(t) = a$$

Üstlü funksiya

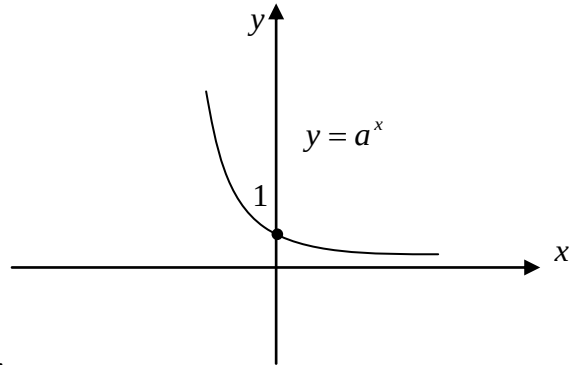
$y = a^x$ şəklində düsturla verilən funksiya üstlü funksiya deyil, burada $a > 0$, $a \neq 1$ olur.

- Üstlü funksiyanın təyin oblastı həqiqi ədədlərdir. $D(a^x) = R$
- Üstlü funksiyanın qiymətlər oblastı müsbət həqiqi ədədlərdir. $E(a^x) = R_+ = (0; +\infty)$
- Üstlü funksiya $a > 1$ olduqda həmişə artır, $0 < a < 1$ olduqda isə həmişə azalır.

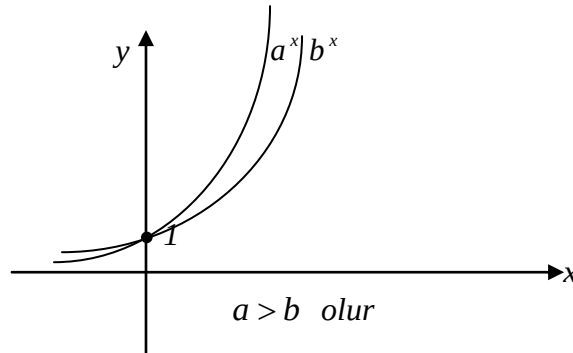
$a > 1$ olduqda



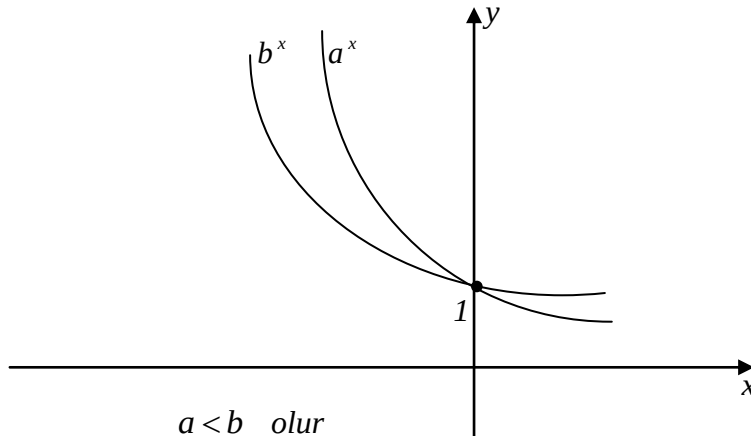
$0 < a < 1$ olduqda



- Üstlü funksiya nə tək, nə də cüt funksiya. Üstlü funksiya dövrü deyil.
 - Üstlü funksiya $a > 1$ olarsa, onda qrafikləri verilmiş üstlü funksiylərdən y oxuna yaxın olanın əsası böyük olur.



- Üstlü funksiya $0 < a < 1$ olduqda, onda qrafikləri verilmiş üstlü funksiylərdən y oxuna yaxın olanın əsası kiçik olur.



Ədədin loqarifmi.

b ədədini almaq üçün a əsasını yüksəltmək lazım gələn qüvvət üstünə b ədədinin a əsasdan loqarifmi deyilir və belə yazılır. $\log_a b$, burada $b > 0, a > 0, a \neq 1$ olmalıdır.

$$\log_2 8 = 3 \quad \text{çünki, } 2^3 = 8$$

$$\log_{\sqrt{2}} 8 = ? \Rightarrow \log_{\sqrt{2}} 8 = x \Rightarrow (\sqrt{2})^x = 8 \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2^3 \Rightarrow \frac{x}{2} = 3 \Rightarrow x = 6$$

● **$a^{\log_a b} = b$ eyniliyinə əsas loqarifmik eynilik deyilir.**

$$\text{a) } 3^{\log_3 5} = 5 \quad \text{b) } 3^{2\log_3 5} = (3^{\log_3 5})^2 = 5^2 = 25 \quad \text{c) } 13^{-\log_3 5} = (13^{\log_3 5})^{-1} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

● 10 əsasdan loqarifmə onluq loqarifm deyilir (Briqqə loqarifmi)

$$\log_{10} a \Rightarrow \lg a; \quad 10^{\lg a} = a; \quad 10^{2\lg 5} = (10^{\lg 5})^2 = 5^2 = 25$$

● e əsasından loqarifmə natural loqarifm deyilir (Neper loqarifmi)

$$\log_e a = \ln a$$

burada e ədədi, irrasional əddir, ədədi qiyməti aşağıdakı kimidir.

$$e \approx 2,7182818284... \approx 2,71$$

$$\log_{-3} 9; \log_1 8; \log_2 (-15); \log_2 0 \quad \text{mənasızdır}$$

$$2^{3+\log_2 3} = 2^3 \cdot 2^{\log_2 3} = 8 \cdot 3 = 24$$

Loqarifmin xassələri.

1. Vahidin istənilən əsasdan loqarifmi sıfıra bərabərdir. $\log_a 1 = 0$

2. İstənilən müsbət ədədin ($a \neq 1$) özünə bərabər əsasdan loqarifmi 1-ə bərabərdir.

$$\log_a a = 1$$

3. Hasilin loqarifmi vuruqların loqarifmləri cəminə bərabərdir

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

4. Kəsrin loqarifmi bərabərdir: surətin loqarifmi minus məxrəcin loqarifmi

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

5. Qüvvətin loqarifmi bərabərdir: üst vurulsun əsasın loqarifmi

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

6. Kökün loqarifmi bərabərdir: kökaltı ədədin loqarifmi bölünsün kökün üstünə

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{\log_a x}{n}$$

7. İki qarşılıqlı tərs ədədin eyni əsasdan loqarifmi bir- birindən yalnız işarələri ilə fərqlənir.

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$$

$$8. \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$9. \log_{a^m} b^k = \frac{k}{m} \log_a b$$

$$10. a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

$$11. a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$$

$$12. \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \cdot \log_d e = \log_a e$$

$$13. \log_a^n b = (\log_a b)^n$$

13. loqarifmin bir əsasdan başqa əsasına keçmək üçün aşağıdakı düsturdan istifadə olunur.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Misal.

$$\ln(5e^3) = \ln 5 + \ln e^3 = \ln 5 + 3 \ln e = \ln 5 + 3$$

$$\log_{42} 2 + \log_{42} 7 + \log_{42} 3 = \log_{42} (2 \cdot 7 \cdot 3) = \log_{42} 42 = 1$$

$$\log_8 81 = \log_{2^3} 3^4 = \frac{4}{3} \log_2 3$$

Loqarifmləmə və antiloqarifm

- Verilmiş ifadənin loqarifmini tapma əməlinə loqarifmləmə deyilir.

$$\textbf{Misal a)} \log_2 \frac{12a^7b^{-8}\sqrt{c}}{19d} = \log_2 (12a^7b^{-8}\sqrt{c}) - \log_2 19d = \log_2 12 + \log_2 a^7 + \log_2 b^{-8} +$$

$$+ \log_2 \sqrt{c} - (\log_2 19 + \log_2 d) = \log_2 (4 \cdot 3) + 7 \log_2 a + \log_2 b^{-8} + \frac{\log_2 c}{2} - \log_2 19 - \log_2 d =$$

$$= 2 + \log_2 3 + 7 \log_2 a - 8 \log_2 b + \frac{1}{2} \log_2 c - \log_2 19 - \log_2 d$$

$$\textbf{b)} \frac{\lg 81 + \lg 64}{2 \lg 3 + 3 \lg 2} = \frac{\lg 3^4 + \lg 2^6}{2 \lg 3 + 3 \lg 2} = \frac{4 \lg 3 + 6 \lg 2}{2 \lg 3 + 3 \lg 2} = \frac{2(2 \lg 3 + 3 \lg 2)}{2 \lg 3 + 3 \lg 2} = 2$$

- Loqarifmi verilmiş ifadənin özünü tapma əməlinə, yəni loqarifmləmənin tərsi olan əmələ antiloqarifm və ya potensiallama deyilir.

$$\textbf{Misal.} \quad \lg x = 5 \lg m + \frac{2}{3} \lg n - \frac{1}{4} \lg p$$

$$\lg x = \lg m^5 + \lg n^{\frac{2}{3}} - \lg p^{\frac{1}{4}}$$

$$\lg x = \lg \left(m^5 \cdot n^{\frac{2}{3}} \right) - \lg p^{\frac{1}{4}}$$

$$\lg x = \lg \frac{m^5 n^{\frac{2}{3}}}{p^{\frac{1}{4}}} \Rightarrow \lg x = \lg \frac{m^5 \sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[4]{p}}$$

Əgər iki ifadənin eyni bir əsasa görə loqarifmləri bərabədirsə, özləri də bərabərdir

$$x = \frac{m^5 \sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[4]{p}}$$

Loqarifmik funksiya.

$y = \log_a x$ şəklində düsturla verilən funksiya loqarifmik funksiya deyilir. Loqarifmik funksiya və üslü funksiya ($y = \log_a x$ və $y = a^x$) qarşılıqlı tərs funksiyalardır. Qarşılıqlı tərs funksiyaların qrafikləri $y = x$ düz xəttinə nəzərən simmetrik olur.

- Loqarifmik funksiyanın təyin oblastı bütün müsbət ədədlərdir.

$$D(\log_a x) = (0; +\infty)$$

- Loqarifmik funksiyanın qiymətlər oblastı bütün həqiqi ədədlərdir

$$E(\log_a x) = (-\infty; +\infty)$$

- Loqarifmik funksiya $a > 1$ olduqda artan; $0 < a < 1$ olduqda isə azalan funksiya.

- $a > 1$ olduqda $x \in (0; 1)$ olarsa, funksiya mənfi qiymət alır.

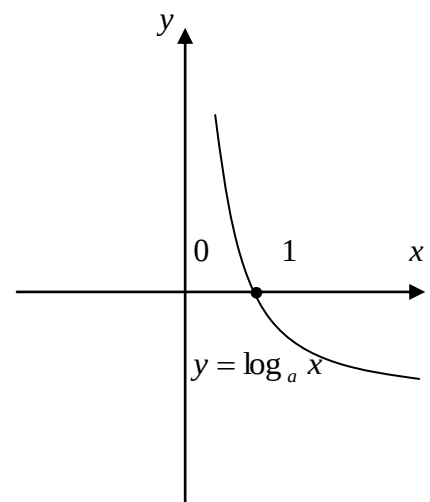
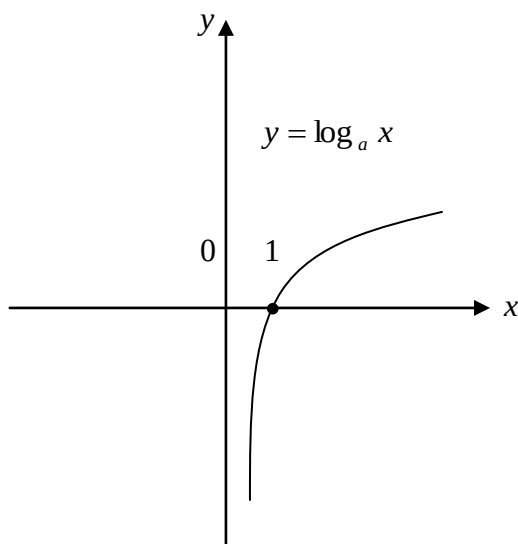
$x \in (1; +\infty)$ olarsa, funksiya müsbət qiymət alır.

- $0 < a < 1$ olduqda $x \in (0; 1)$ olarsa, funksiya müsbət qiymət alır.

$x \in (1; +\infty)$ olarsa, funksiya mənfi qiymət alır.

$a > 1$ olduqda qrafik belə olur

$0 < a < 1$ olduqda belə olur.



● Loqarifmik funksiya nə tək, nə də cüt funksiya. Loqarifmik funksiya dövrü deyil.

Misal. a) Müqayisə edin.

$$\log_5 4 < \log_5 7$$

$$\log_2 33 > \log_3 240, \text{ çünki } \log_2 33 \approx 5, \dots \text{ və } \log_3 240 = 4, \dots$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 6$$

b) Ədədlərin işarəsini təyin edin

$$\log_{\pi}(\sqrt{50}-6), \log_{\frac{1}{7}} 6; \lg 0,7$$

$$\log_{\pi}(\sqrt{50}-6) > 0$$

$$\lg 0,7 < 0$$

$$\log_{\frac{1}{7}} 6 < 0$$

Üstlü tənliklər.

Dəyişəni qüvvət üstündə olan tənliklərə üstlü tənliklər deyilir. $a^x = b$, burada $a > 0, a \neq 1$ olmalıdır. Bu tənlikdə $b \leq 0$ olarsa, tənliyin həlli yoxdur, çünki, $E(a^x) = (0; +\infty)$ -dur. Sadə üstlü tənliklər əsasən iki üsulla həll olunur:

1. Verilmiş tənliyi $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ şəklinə gətirib, üstləri bərabərləşdirib $f(x) = g(x)$ tənliyini həll etməklə

2. Yeni dəyişən (məsələn, $a^{f(x)} = t$) daxil edərək, cəbri tənliyə gətirməklə

$$\text{a) } 3^x = \frac{1}{27} \Rightarrow 3^x = 3^{-3} \Rightarrow x = -3$$

$$\text{b) } 8^{x-2} = 5^{x-2} \Rightarrow \frac{8^{x-2}}{5^{x-2}} = \frac{5^{x-2}}{5^{x-2}} \Rightarrow \left(\frac{8}{5}\right)^{x-2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{8}{5}\right)^{x-2} = \left(\frac{8}{5}\right)^0 \Rightarrow x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{c) } \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$$

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \frac{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x} = 4$$

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x} = 4 \text{ burada } \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = t \text{ qəbul edək,}$$

$$t + \frac{1}{t} - 4 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{3} \text{ əvəzləmədə nəzərə alaq.}$$

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2 - \sqrt{3}$$

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2 + \sqrt{3}$$

$$(2 - \sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = (2 - \sqrt{3})^1 \quad (2 - \sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = \frac{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}{2 - \sqrt{3}}$$

$$\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 2 \quad (2 - \sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = (2 - \sqrt{3})^{-1} \Rightarrow \frac{x}{2} = -1 \Rightarrow x = -2$$

Cavab: 2 və ya -2

Üstlü bərabərsizliklər.

Dəyişəni qüvvət üstündə olan bərabərsizliklərlə üstlü bərabərsizliklər deyilir. Bu bərabərsizliklərin həlli, üstlü funksiyanın $a > 1$ olduqda artan, $0 < a < 1$ olduqda isə azalan olması xassəsinə əsaslanır.

$$a) 5^x > \sqrt[3]{25} \Rightarrow 5^x > \sqrt[3]{5^2} \Rightarrow 5^x > 5^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x > \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

$$b) 0,5^{4x-2} < 0,25 \Rightarrow 0,5^{4x-2} < 0,5^2 \Rightarrow 4x-2 > 2 \Rightarrow 4x > 4 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow (1; +\infty)$$

$$c) x^2 \cdot 3^x < 3^{2+x}$$

$$ç) (x-3)^{2x^2-7x} > 1$$

$$x^2 \cdot 3^x - 3^{2+x} < 0$$

$$3^x(x^2 - 9) < 0$$

$$\begin{cases} x-3 > 1 \\ 2x^2 - 7x > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < x-3 < 1 \\ 2x^2 - 7x < 0 \end{cases}$$

$$3^x > 0 \text{ olduğundan}$$

$$x > 4 \cup 3 < x < 3,5$$

$$x^2 - 9 < 0$$

$$x \in (3; 3,5) \cup (4; +\infty)$$

$$x \in (-3; 3)$$

Loqarifmik tənliklər.

Məchulu loqarifmik funksiya işarəsi altında olan tənliyə loqarifmik tənlik deyilir. Loqarifmik tənliklər əsasən

1. tərifi görə;
2. potensiallamaqla;
3. əvəzetmə üsulu ilə ;
4. bir əsasdan başqa əsasa keçməklə;
5. hər tərəfi loqarifmləməklə;
6. əsas eyniliklərin köməyi ilə və s.

üsullarla həll olunur. Loqarifmik tənliklərdə alınan köklər tənlikdə yerinə qoyulub yoxlanılmalıdır, kənar köklər alınmalıdır.

$$a) 3^x = 6$$

$$b) \log_3(2x-1) = 3$$

$$c) 3\lg^2 x - \lg x^2 - 1 = 0$$

$$\log_3 3^x = \log_3 6$$

$$2x-1 = 27$$

$$3\lg^2 x - 2\lg x - 1 = 0$$

$$\lg x = t$$

$$x \cdot \log_3 3 = \log_3 6 \quad 2x = 28$$

$$x \cdot 1 = \log_3 6 \quad x = 14$$

$$x = \log_3 6$$

$$3t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$D = 4 + 12 = 16$$

$$t = \frac{2 \pm 4}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 4}{6} \quad t_1 = 1; t_2 = -\frac{1}{3}$$

$$\lg x = 1 \quad \lg x = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = 10 \quad x_2 = 10^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

$$d) \log_{x-1}(x^2 - x - 6) = 2$$

$$e) \log_2(\log_3(\log_4 x)) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 > 0 & \Rightarrow (-\infty; -2) \cup (3; +\infty) \\ x - 1 > 0 & \Rightarrow x > 1 \\ x - 1 \neq 1 & \Rightarrow x \neq 2 \\ x^2 - x - 6 = (x - 1)^2 \end{cases}$$

$$\log_3 \log_4 x = 2^0 = 1$$

$$\log_4 x = 3$$

$$x = 4^3 = 64$$

$$\text{Cavab: } x = 7$$

Loqarifmik bərabərsizliklər.

Məchulu loqarifmik funksiya işarəsi altında olan bərabərsizliklərə loqarifmik bərabərsizliklər deyilir. Belə bərabərsizliklərin həlli $a > 1$ olduqda loqarifmik funksiyanın artan, $0 < a < 1$ olduqda isə azalan olması xassəsinə əsaslanır. Loqarifmik bərabərsizliklərin həlli zamanı funksiyanın təyin oblastı hökmən nəzərə alınmalıdır.

$$a) \log_x 3 < 0$$

$$\text{II üsul. } \log_x 3 < 0 \Rightarrow \frac{1}{\log_3 x} < 0 \Rightarrow \log_3 x < 0$$

$$0 < x < 1$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow (0; 1)$$

$$b) \log_2(50 - 10x) > 4$$

$$\begin{cases} 50 - 10x > 0 \\ 50 - 10x > 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10x > -50 \\ -10x > 16 - 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 5 \\ -10x > -34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x < 3,4 \end{cases} \Rightarrow (-\infty; 3,4)$$

$$c) \log_{\frac{1}{2}}(x - 6) \geq 4$$

$$\begin{cases} x - 6 > 0 \\ x - 6 \leq \frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 6 \\ x \leq 6\frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow \left(6; 6\frac{1}{10}\right]$$

$$d) (x - 1)\log_{\frac{1}{3}}(3 - x) < 0$$

$$\begin{cases} x-1 < 0 \\ \log_{\frac{1}{3}}(3-x) > 0 \end{cases} \vee \text{ya} \begin{cases} x-1 > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}}(3-x) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1 \\ 3-x < 1 \\ 3-x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1 \\ 3-x > 0 \\ 3-x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1 \\ x < 3 \Rightarrow \emptyset \\ x > 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1 \\ x < 3 \Rightarrow (1;2) \\ x < 2 \end{cases}$$

Cavab: (1;2)

Ardıcılığın limiti

Tutaq ki, $\{x_n\}$ ardıcılığı və a ədədi verilmişdir. İstənilən müsbət ε ədədi üçün elə n_0 nömrəsi göstərmək mümkün olarsa ki, bu nömrədən sonra gələn bütün n -lər üçün

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənilir, onda a ədədinə x_n ardıcılığının limiti deyilir və belə yazılır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Ardıcılığın ancaq bir limiti ola bilər. Limiti olan ardıcılığa yığılan ardıcılıq deyilir. Limiti sonsuzluq olan və ya limiti olmayan ardıcılığa isə dağılan ardıcılıq deyilir.

Yığılan ardıcılıq həmişə məhdud olur. Belə ardıcılığın isə limiti var.

Sonsuz böyüyən ardıcılığın limiti $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \infty$

Sonsuz kiçilən ardıcılığın limiti $\lim_{n \rightarrow -\infty} x_n = 0$, yəni 0-a bərabərdir.

- Sabit kəmiyyətin limiti özünə bərabərdir.
- Sabit vuruğu limit işarəsi xaricinə çıxartmaq olar.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Cx_n = C \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

- Cəmin (fərqin) limiti limitlərin cəminə (fərqinə) bərabərdir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

- Hasilin limiti limitlərin hasilinə bərabərdir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

- Kəsrin limiti, surətin limitinin məxrəcin limitinə (0-dan fərqli) bölünməsinə bərabərdir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \text{ (burada } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0 \text{ olmalıdır)}$$

- Ədədi ∞ -a böləndə sıfır alınır. $\frac{5}{\infty} = 0$
- Ədədi 0-a böləndə sonsuzluq alınır. $\frac{4}{0} = \infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ olur.

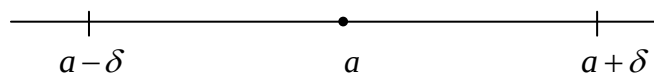
$$\text{Misal. a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 - 2}{n^2 + 5n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n} + \frac{5}{n^2} - \frac{1}{n^3}} = \frac{1 + 0 - 0}{0 + 0 - 0} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{2n-1} \cdot \frac{5n+21}{3n+3} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+21}{3n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2-\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+\frac{21}{n}}{3+\frac{3}{n}} = \\ &= \frac{3}{2-0} \cdot \frac{5+0}{3+0} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{2} = 2,5 \end{aligned}$$

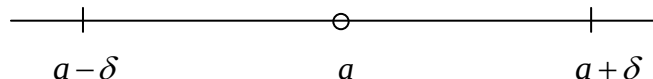
$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^{n+1} + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^n}{3^n}}{\frac{3^{n+1}}{3^n} + \frac{2^n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{3+0} = \frac{1}{3}$$

Funksiyanın limiti

Verilmiş a nöqtəsini daxilində saxlayan (α, β) aralığına a -nın ətrafı deyilir. Xüsusi halda, $\delta > 0$ ədədi üçün $(a - \delta; a + \delta)$ aralığına a nöqtəsinin simmetrik ətrafı və ya δ ətrafı, δ - ya isə onun radiusu deyilir.



a nöqtəsinin ətrafından onun özünü atmaqla alınan çoxluğa bu nöqtənin təcrid olunmuş ətrafı deyilir.



Tutaq ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə $\delta > 0$ ədədi tapmaq olar ki, $0 < |x - a| < \delta$ şərtini ödəyən x -lər üçün $|f(x) - A| < \varepsilon$ olur. Onda A ədədinə $y = f(x)$ funksiyasının $x = a$ nöqtəsində limiti deyilir.

Funksiyanın nöqtədəki limitini hesablamaq üçün, həmin nöqtəni limitin daxilində olan funksiyada yerinə yazmaq lazımdır.

❖ Əgər $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ olarsa, onda $\alpha(x)$ funksiyası $x \rightarrow a$ olduqda sonsuz kiçilən funksiya adlanır. Məs: $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$.

❖ Əgər $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = \infty$ olarsa, onda $\beta(x)$ funksiyası $x \rightarrow a$ olduqda sonsuz böyüyən funksiya adlanır. Məs: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2} = \infty$.

Funksiyanın limiti haqqında aşağıdakı teoremlər doğrudur:

1) $f(x)$ funksiyasının a nöqtəsində limiti varsa, yeganədir.

2) $x \rightarrow a$ olduqda $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının limiti varsa, onların cəminin də, hasilinin də limiti var və

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\text{Xüsusi halda, } \lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Yəni sabiti limit işarəsi xaricinə çıxarmaq olar.

3) $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının $x \rightarrow a$ olduqda limiti varsa və $g(x)$ funksiyasının limiti sıfırdan fərqlidirsə, bu funksiyaların nisbətinin limiti onların limitləri nisbətinə bərabərdir.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

4) a nöqtəsinin müəyyən təcrid olunmuş ətrafında $\varphi(x) \leq f(x) \leq A$ (və ya $A \leq f(x) \leq \varphi(x)$) və $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A$ isə, onda $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

❖ a nöqtəsinin təcrid olunmuş ətrafının tərifinə əsasən, x arqumenti a nöqtəsindən həm solda, həm də sağda qiymətlər ala bilər. Lakin bəzən x dəyişəni a – ya yalnız bir tərəfdən yaxınlaşdıqda funksiyanın limitinin tərifini vermək lazım gəlir.

x dəyişəninə a – ya soldan yaxınlaşması $x \rightarrow a - 0$ kimi, sağdan yaxınlaşması isə $x \rightarrow a + 0$ kimi işarə edilir.

Əgər $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$ varsa, onda ona $f(x)$ - in a nöqtəsində sol limiti deyilir və

belə yazılır. $f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$

Əgər $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ varsa, onda ona $f(x)$ - in a nöqtəsində sağ limiti deyilir və

belə yazılır. $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$

Funksiyanın sağ və sol limitlərinə onun birtərəfli limitləri deyilir. Qeyd edək ki, əgər $f(x)$ funksiyasının $x = a$ nöqtəsində limiti varsa və $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ isə, onda $f(a+0)$, $f(a-0)$ limitləri var və

$$f(a+0) = f(a-0) = A$$

Tərsi də doğrudur: yəni $f(a+0) = f(a-0) = A$ olarsa, onda $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ olur.

Qeyd: $\frac{-a}{0} = +\infty, (a > 0)$

$$\infty + \infty = \infty$$

$$-\frac{a}{0} = -\infty, (a > 0)$$

$$(\infty)^n = \infty, (n \in \mathbb{N})$$

$$\frac{a}{\infty} = 0, (a \in R)$$

$$a \cdot \infty = +\infty, (a > 0)$$

$$-a \cdot \infty = -\infty, (a > 0)$$

Qeyd: $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0 \cdot \infty; \infty - \infty; 1^\infty$ halları limit üçün qeyri- müəyyənlik hallarıdır. Bu hallar qabaqda araşdırılacaq.

Misallar.

$$a) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-5} + 2}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{9-5} + 2}{\sqrt{9} - 1} = \frac{2+2}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x - x^2 - 6}{x^2 - 12x + 20} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)} = -\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-10} = -\frac{2-3}{2-10} = -\frac{1}{8}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x-2} - \frac{24}{x^3-8} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 4x - 16}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+4)}{x^2 + 2x + 4} = \frac{2(2+4)}{2^2 + 2 \cdot 2 + 4} = \frac{12}{12} = 1$$

$$ç) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{3 - \sqrt{x+3}}{6-x} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(3 - \sqrt{x+3})(3 + \sqrt{x+3})}{(6-x)(3 + \sqrt{x+3})} = \frac{1}{6}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1)} = \frac{1}{3}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} 3-x, & x \leq 1 \text{ olduqda} \\ 2x-1, & x > 1 \text{ olduqda} \end{cases} \quad \text{funksiyanın } x=1 \text{ nöqtəsində sol və sağ limitlərini}$$

tapın.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} (3-x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} (2x-1) = 1 \end{aligned} \right\}$$

Beləliklə, funksiyanın $x=1$ nöqtəsində sol və sağ limitləri var, lakin onlar bərabər deyil.

Deməli, bu funksiyanın $x=1$ nöqtəsində limiti yoxdur.

$$f) f(x) = \frac{x+|x|}{2x} \text{ funksiyanın } x=0 \text{ nöqtəsində sol və sağ limitlərini tapın.}$$

$$\text{Məlumdur ki, } |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Onda

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x-x}{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x+x}{2x} = 1$$

j) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > -2 \\ x+4, & x \leq -2 \end{cases}$ olarsa, funksiya üçün $f(-2+0)$ və $f(-2-0)$ birtərəfli

limitlərini hesablayın.

$$f(-2+0) = \lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+0} x^2 = 4$$

$$f(-2-0) = \lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-0} (x+4) = -2+4 = 2$$

Beləliklə, $f(-2+0) \neq f(-2-0)$. Bu isə o deməkdir ki, $x = -2$ nöqtəsində $f(x)$ funksiyanın limiti yoxdur.

❖ Məlumdur ki, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \infty$. Ancaq x - in $\frac{\pi}{2}$ -yə soldan və ya sağdan yaxınlaşmasından

asılı olaraq yazıla bilər ki,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty$$

Görkəmli limitlər

1) $y = \frac{\sin x}{x}$ funksiyanın $x \rightarrow 0$ olduqda limiti var və $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Bu limitə birinci görkəmli limit deyilir.

2) $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ funksiyanın $x \rightarrow 0$ olduqda limiti var və $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Bu limitə ikinci görkəmli limit deyilir, $e \approx 2,71828.....$ irrasional ədəddir. Digər mühüm düsturlar da vardır:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{arctg} x} = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{k}{x}} = e^k$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5 = 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x} = 1$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{5}{2} x}{2 \sin^2 \frac{3}{2} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin \frac{5}{2} x}{\frac{5}{2} x} \right)^2 \cdot \frac{25}{4}}{\left(\frac{\sin \frac{3}{2} x}{\frac{3}{2} x} \right)^2 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{25}{9}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2x}{\frac{\sin 7x}{7x} \cdot 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2}{\frac{\sin 7x}{7x} \cdot 7} = \frac{2}{7} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x}} = \frac{2}{7}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\sin 3x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5x}{\frac{\sin x}{x} \cdot x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3x}{\frac{\sin x}{x} \cdot x} = 5 - 3 = 2$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \cdot \frac{1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} \cdot \frac{1}{\cos 2x} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} = \frac{2}{3}$$

$$z) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - \sin 2x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos 3x}{\sin x} = 2$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} \right) = \frac{2}{5}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 3x}{\arcsin 6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctg 3x}{3x} \cdot \frac{6x}{\arcsin 6x} \cdot \frac{3}{6} \right) = \frac{1}{2}$$

$$k) \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{4+t}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{4}{t}+1} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{4}{t}} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} (1+t) = e^4 \cdot 1 = e^4$$

$$m) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x = e^2$$

$$n) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{x} \right)^x = e^{-3}$$

$$y) \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{3x}(-3)} = e^{-3}$$

$$s) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^x \cdot \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right) \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2x} \right)^x}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{2 + \frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2x} \right)^{\frac{2x}{3} \cdot \frac{3}{2}}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{2x \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} = e$$

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = e^k \text{ düsturunu isbat edin.}$$

$\frac{k}{x} = t$ olsun. Onda $t x = k \Rightarrow x = \frac{k}{t}$. Əgər $x \rightarrow \infty$ olarsa, alarıq ki, $t \rightarrow 0$. Onda

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{k}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+t)^{\frac{1}{t}} \right]^k = e^k$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^3 = \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{8}$$

$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0 \cdot \infty; \infty - \infty$ **kimi qeyri-müəyyənlik halları**

$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}$ halları üçün Lopital qaydasından aşağıdakı kimi istifadə olunur.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots$$

Yəni, surətin və məxrəcin ayrı-ayrılıqda törəməsi alınır. Əgər yenə də qeyri- müəyyənlik halı alınarsa, proses o vaxta qədər davam etdirilir ki, qeyri- müəyyənlik halı alınmasın.

$(0 \cdot \infty)$ tipli qeyri- müəyyənlik alındıqda, belə limitlərin həlli $\frac{0}{0}$ qeyri- müəyyənlik halına gətirilir.

$(\infty - \infty)$ şəklində limitləri həll etmək üçün, limitin daxilindəki ifadəni qoşmasına vurub, bölmək lazımdır. Bəzi hallarda isə ortaq məxrəcə gətirib sadələşdirirlər.

$$a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)'}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{1} = -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = -\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 2x - 3)'}{(x^2 - 9)'} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 2}{2x} = \frac{2 \cdot 3 - 2}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \operatorname{ctgx}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x'}{\operatorname{tg}' x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x = 1$$

$$ç) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \operatorname{tg} 2x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x - \frac{\pi}{4}}{\operatorname{ctg} 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)'}{\operatorname{ctg}' 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{-2}{\sin^2 2x}} = -\frac{1}{2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{ə)} \lim_{x \rightarrow \infty} (3x - \sqrt{9x^2 - 2x - 4}) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x - \sqrt{9x^2 - 2x - 4})(3x + \sqrt{9x^2 - 2x - 4})}{3x + \sqrt{9x^2 - 2x - 4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x)^2 - (\sqrt{9x^2 - 2x - 4})^2}{3x + \sqrt{9x^2 - 2x - 4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 4}{3x + \sqrt{9x^2 - 2x - 4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x} + \frac{4}{x}}{\frac{3x}{x} + \sqrt{9 \cdot \frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} - \frac{4}{x^2}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 4 \cdot \frac{1}{x}}{3 + \sqrt{9 - 2 \cdot \frac{1}{x} - 4 \cdot \frac{1}{x^2}}} = \frac{2 + 4 \cdot 0}{3 + \sqrt{9 - 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0}} = \frac{2}{3 + \sqrt{9}} = \frac{2}{3+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Funksiyaların kəsilməzliyi

Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası $(a; b)$ aralığında təyin olunmuşdur və $x_0 \in (a; b)$. $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində limiti funksiyanın bu nöqtədəki qiymətinə bərabərdirsə, yəni $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ olarsa, onda $f(x)$ funksiyasına x_0 nöqtəsində kəsilməz funksiya deyilir.

Tərifə görə x_0 nöqtəsində kəsilməz olan $y = f(x)$ funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəməlidir:

1) $y = f(x)$ funksiyası $x = x_0$ nöqtəsində təyin olunmalıdır.

2) $x = x_0$ nöqtəsində onun sonlu limiti olmalıdır.

3) $y = f(x)$ funksiyasının $x = x_0$ nöqtəsindəki $f(x_0)$ qiyməti onun bu nöqtədəki limitinə bərabər olmalıdır.

$(a; b)$ aralığının bütün nöqtələrində kəsilməz olan funksiya bu aralıqda kəsilməz funksiya deyilir.

❖ x_0 nöqtəsində kəsilməz olan sonlu sayda funksiyanın cəmi də bu nöqtədə kəsilməzdir.

❖ x_0 nöqtəsində kəsilməz olan sonlu sayda funksiyanın hasili də bu nöqtədə kəsilməzdir.

❖ x_0 nöqtəsində kəsilməz olan iki funksiyanın nisbəti, məxrəcdəki funksiya x_0 nöqtəsində sıfırdan fərqli olduqda, bu nöqtədə kəsilməzdir.

❖ $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$), $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) funksiyaları bütün həqiqi oxda; $y = \lg x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \log_a x$ funksiyaları isə təyin oblastlarında kəsilməzdir.

Bəzi hallarda funksiyanın kəsilməzliyini onun sağ və sol limitləri vasitəsilə təyin etmək daha asan olur.

Əgər $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ olarsa, $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində sağdan, $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$ olarsa, $y = f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində soldan kəsilməz funksiya adlanır.

❖ Əgər $f(x)$ funksiyası $x = x_0$ nöqtəsində

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$$

şərtini ödəyərsə, onda bu funksiya x_0 nöqtəsində kəsilməz funksiyaadır.

$y = f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində limiti yoxdursa (və ya varsa, lakin $f(x_0)$ -a bərabər deyilsə), bu funksiya x_0 nöqtəsində kəsiləndir və onda x_0 onun kəsilmə nöqtəsi adlanır. Qeyd edək ki, x_0 nöqtəsi kəsilmə nöqtəsi isə, bu nöqtədə funksiyanın sol və sağ limitləri ola bilər, lakin bu limitlər, ümumiyyətlə bərabər olmaya da bilər.

Əgər x_0 nöqtəsində $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ limitləri varsa, lakin $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ olarsa, onda $f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)$ fərqinə $y = f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində sıçrayışı deyilir.

Misal: a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$ funksiyasının kəsilmə nöqtələrini tapın.

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \text{ nöqtələri kəsilmə nöqtəsidir.}$$

$(-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$ funksiyanın kəsilməzlik aralığıdır.

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 3, & x \leq -2 \\ x^2 + 1, & -2 < x < 2 \\ \frac{5}{x-1}, & x \geq 2 \end{cases} \text{ funksiyanın kəsilməzliyini araşdırın.}$$

Həlli.

Sərhəd nöqtələrinə baxaq: $x = -2$ və $x = 2$

$$f(-2-0) = \lim_{x \rightarrow -2-0} 3 = 3$$

$$f(-2+0) = \lim_{x \rightarrow -2+0} (x^2 + 1) = 5$$

$f(-2-0) \neq f(-2+0)$ olduğundan, $x = -2$ kəsilmə nöqtəsidir.

$$f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x^2 + 1) = 5$$

$$f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{5}{x-1} = 5$$

$f(2-0) = f(2+0) = 5$ olduğundan, $x = 2$ nöqtəsində kəsilməzdir.

❖ Elementar funksiyalar təyin olunduğu hər bir nöqtədə kəsilməzdir. Elementar funksiyalar bir düsturla ifadə olunur.

$y = |x|$ funksiyası elementar deyil, çünki bu funksiya

$$y = \begin{cases} x, & \text{я\text{е}я\r p } x \geq 0 \text{ ися} \\ -x, & \text{я\text{е}я\r p } x < 0 \text{ ися} \end{cases} \text{ kimi iki düsturla verilir.}$$

$y = |x|$ funksiyası $(-\infty; +\infty)$ aralığında kəsilməzdir. Bu funksiyanın $x_0 = 0$ nöqtəsində törəməsi yoxdur.

Çoxluqlar

1. Çoxluq

Çoxluq – müəyyən elementlərin toplusudur.

Məsələn.

$$A = \{a, b, c, \dots, z\}$$

$$B = \{\text{Bakı, Gəncə, Şəki, ...}\}$$

$$N = \{1; 2; 3; \dots\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Daxil olma əməli} \\ \in - \text{“daxildir” işarəsi} \\ \notin - \text{“daxil deyil” işarəsi} \end{array} \right.$$

Məsələn

$$A = \{a; b; c\}$$

$$a \in A; c \in A; 3 \notin A$$

Tərif: Heç bir elementi olmayan çoxluğa boş çoxluq deyilir və $\emptyset$ kimi işarə olunur.

Məsələn

“0” – dan kiçik natural ədədlər çoxluğu,...

Tərif: Çoxluğun elementlərinin sayına çoxluğun gücü deyilir. $n(A)$; $n(B)$ və s. kimi işarə edilir.

Məsələn

$$A = \{a, b, c\} \Rightarrow n(A) = 3$$

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow n(B) = 5$$

$$N = \{1; 2; 3; \dots\} \Rightarrow n(N) = \infty$$

Tərif: Elementlərinin sayı sonlu olan çoxluğa sonlu çoxluq deyilir.

Məsələn

$$M = \{2; 3; 4; 5\}$$

Tərif: Elementlərinin sayı sonsuz olan çoxluğa sonsuz çoxluq deyilir.

Məsələn

$$N = \{1; 2; 3; \dots\}$$

Tərif: Elementlərinin sayı eyni olan çoxluqlar eynigüclü çoxluqlar adlanır.

Məsələn

• $A = \{1, 2, 3, 4\}$ və $B = \{a, b, c, d\}$ olduqda $n(A) = n(B) = 4$ olduğundan bu çoxluqlar eynigüclüdür.

Hesabi çoxluq

Tərif: N natural ədədlər çoxluğu ilə ekvivalent olan hər bir çoxluğa hesabi çoxluq deyilir.

Məsələn

- Tək ədədlər çoxluğu
- 4-ə bölünən ədədlər çoxluğu

Qeyd. Bütün hesabi çoxluqlar öz aralarında ekvivalentdirlər.

2. Bərabər çoxluqlar

Tərif. Bir- birindən yalnız elementlərinin düzülüşü ilə fərqlənən çoxluqlara bərabər çoxluqlar deyilir.

Məsələn

$$A = \{a, b, c\} \text{ çoxluğunun bərabər çoxluqları}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{a; b; c\} \quad \{b; a; c\} \quad \{c; a; b\} \\ \{a; c; b\} \quad \{b; c; a\} \quad \{c; b; a\} \end{array} \right\} \text{ 6 ədəd}$$

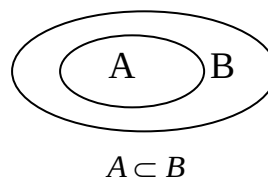
Qeyd. n elementi olan çoxluğun $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ sayda bərabər çoxluğu var.

Onda yuxarıdakı misalda A çoxluğu 3 elementli olduğundan bərabər çoxluqlarının sayı $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ ədəd olur.

3. Alt çoxluqlar

Tərif. Əgər A çoxluğunun hər bir elementi həm də B-yə daxil olarsa, onda A-ya B-nin alt çoxluğu deyilir: $A \subset B$ kimi işarə olunur.

$$A \subset B \Rightarrow \begin{cases} \text{истинно } x \in A \text{ } \forall x \in B \\ x \in B \text{ } \forall x \in A \end{cases}$$



❖ Hər bir çoxluq özünün alt çoxluğudur:

$$A \subset A$$

❖ $\emptyset$ hər bir çoxluğun alt çoxluğudur:

$$\emptyset \subset A$$

Misal

$B = \{1; 2; 3\}$ çoxluğunun bütün alt çoxluqlarını yazın.

Həlli

$$\left. \begin{array}{l} \{1\} \quad \{2\} \quad \{3\} \\ \{1, 2\} \quad \{1, 3\} \quad \{2, 3\} \\ \{1, 2, 3\} \\ \emptyset \end{array} \right\} 8 \text{ ədəd}$$

Qeyd. n elementi olan çoxluğun 2^n sayda alt çoxluğu var.

Yuxarıdakı misalda B çoxluğu 3 elementli çoxluq olduğundan alt çoxluqların sayı $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ ədəd olur.

4. Çoxluqların birləşməsi

Tərif: A və B çoxluqlarının bütün elementlərindən ibarət olan çoxluğa A və B çoxluqlarının birləşməsi deyilir və $A \cup B$ kimi işarə olunur.

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ } \vee x \in B\}$$

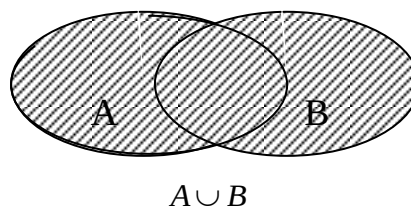
Məsələn

$$A = \{1; 2; 3\}$$

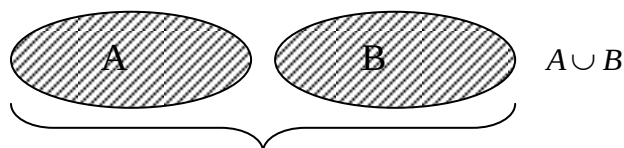
$$B = \{2; 3; 4; 5\}$$

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

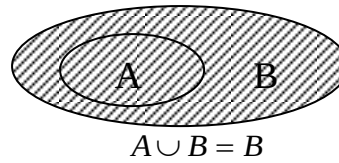
❖ A və B kəsişir



❖ A və B kəsişmir.



❖ A, B – nin alt çoxluğu olarsa:



Xassələri

$$A \cup A = A$$

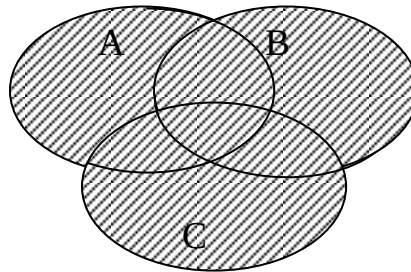
$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$$

Qeyd.



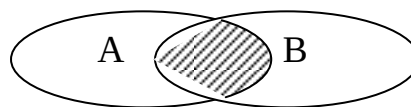
$$\Rightarrow A \cup B \cup C$$

5. Çoxluqların kəsişməsi

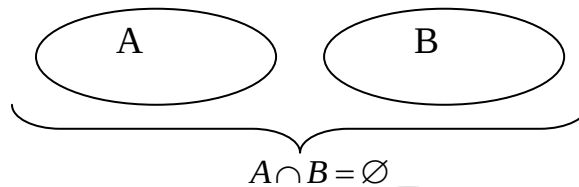
Tərif: A və B çoxluqlarının ortaq elementlərindən ibarət olan çoxluğa A və B çoxluqlarının kəsişməsi deyilir və $A \cap B$ kimi işarə olunur:

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ və } x \in B\}$$

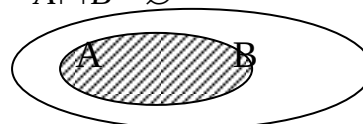
❖ A və B kəsişir



❖ A və B kəsişmir



❖ A, B – nin alt çoxluğu



$$A \cap B = A$$

Məsələn,

$$A = \{1; 2; 3\}$$

$$B = \{2; 3; 4; 5\} \quad A \cap B = \{2; 3\}$$

Xassələri:

$$A \cap A = A$$

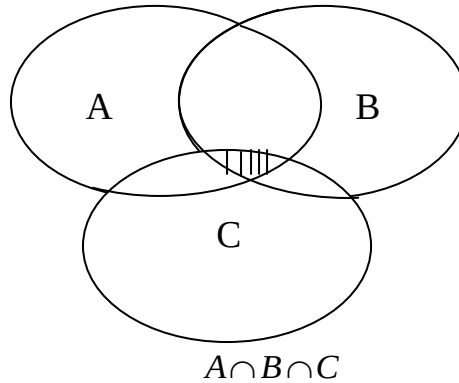
$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$$

Qeyd



Qeyd

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

6. Çoxluqların fərqi

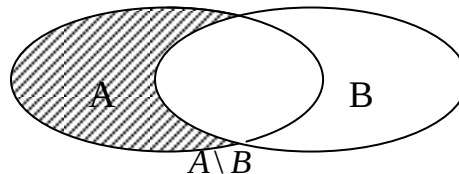
Tərif: A çoxluğunun yalnız A-ya daxil olan (B-yə daxil olmayan) elementlərindən ibarət olan çoxluğa A və B çoxluqlarının fərqi deyilir və $A \setminus B$ kimi işarə olunur.

$$A \setminus B = \{x / x \in A \text{ və } x \notin B\}$$

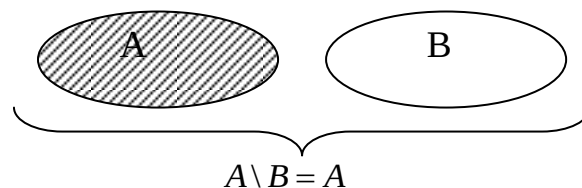
Məsələn

$$\left. \begin{array}{l} A = \{a; b; c\} \\ B = \{b; c; d; e\} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \setminus B = \{a\} \\ B \setminus A = \{d; e\} \end{array} \right.$$

❖ A və B kəsişir



❖ A və B kəsişmir



❖ A, B –nin alt çoxluğudur



Qeyd.

$A \subset B$ olduqda $B \setminus A$ fərqi A çoxluğunun B çoxluğuna tamamlayıcısı deyildir və A'_B kimi işarə olunur.

Xassələr:

$$A \setminus A = \emptyset$$

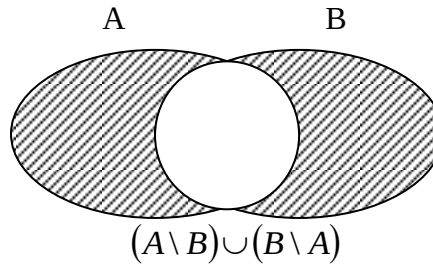
$$A \setminus \emptyset = A$$

$$A \setminus B \neq B \setminus A$$

$$A \subset B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} A \setminus B = A \\ B \setminus A = B \end{cases}$$

Qeyd



7. Çoxluqların birləşməsinin elementlərinin sayı

❖ A və B kəsişir

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

❖ A və B kəsişmir

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

$$❖ \quad n(A \cup B) = n(A \setminus B) + n(B \setminus A) + n(A \cap B)$$

Qeyd: A çoxluğunun hər bir elementinə B çoxluğunun yalnız və yalnız bir elementini və tərsinə B çoxluğunun hər bir elementinə A çoxluğunun yalnız və yalnız bir elementini qoymaq mümkündürsə, bu cür uyğunluğa qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq deyilir.

A və B çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradılmışsa, belə çoxluqlar ekvivalent çoxluqlar adlanır və ∞ simvolu ilə göstərilir.

Elementləri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq olan iki A və B çoxluqları eynigüclü çoxluqlar adlanır. Bu halda “ A və B çoxluqlarının gücü eynidir” deyilir. Elementləri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq mümkün olan sonlu çoxluqların elementlərinin sayı bərabərdir.

Natural ədədlər çoxluğu elə eynigüclü olan hər bir çoxluğa hesabi çoxluq deyilir. Məs: cüt və ya tək ədədlər çoxluğu; rəşional ədədlər çoxluğu və s.

a) $y = 2x + 1$ funksiyası $A = [1; 4]$ və $B = [3; 9]$ çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradır.

b) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ funksiyası $A = [-1;1]$ və $B = [0;1]$ çoxluqları arasında qarşılıqlı

birqiymətli uyğunluq yaradır.

c) $y = x^2$ funksiyası $A = [-1;1]$ və $B = [0;1]$ çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmır.

Birləşmələr nəzəriyyəsi

1. Faktorial

Tərif: 1-dən n -ə qədər olan natural ədədlərin hasilinə n faktorial deyilir və $n!$ kimi işarə olunur:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Məsələn,

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Faktoriyal işarəsini sola doğru sürüşdürmək olar.

$$n! = (n-1)!n$$

$$n! = (n-2)!(n-1) \cdot n$$

$$n! = (n-5)!(n-4)(n-3)(n-2)(n-1) \cdot n \quad \text{və s.}$$

Qeyd: Sıfır faktoriyal vahidə bərabərdir: $0! = 1$

Misal. $\frac{10!}{15!} \cdot \frac{14!}{9!} = \frac{9! \cdot 10}{14! \cdot 15} \cdot \frac{14!}{9!} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

2. Permutasiya (Yerdəyişmə)

Tərif: n elementli çoxluğun yalnız elementlərinin sırasına görə fərqlənən düzlülüşlərinə permutasiya deyilir və ${}_nP_n$ ilə işarə olunur.

Məsələn

$A = \{a; b; c\}$ olarsa, bütün yerdəyişmələri (permutasiyaları) yazaq.

$$\left\{ \begin{matrix} \{a; b; c\} & \{b; a; c\} & \{c; a; b\} \\ \{a; c; b\} & \{b; c; a\} & \{c; b; a\} \end{matrix} \right\} {}_3P_3 = 6$$

❖ n elementli çoxluğun permutasiyalarının sayı

$${}_nP_n = n!$$

Misal a) 5 kitabı kitab rəfinə neçə müxtəlif üsulla düzmək olar?

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

b) $A = \{a, b, c, d, e\}$ çoxluqlarının elementlərindən mümkün olan neçə permutasiya düzəltmək olar? $P = 5!$

Qeyd. Dəyirmi masa arxasında n nəfər $(n-1)!$ müxtəlif üsulla oturur.

Misal. Dəyirmi masa arxasında 5 nəfər neçə müxtəlif üsulla oturur?

$$(n-1)! = (5-1)! = 4! = 24$$

3. Permutasiya (Yerləşdirmə) ${}_n P_k$

Tərif: ${}_n P_k$ - n elementli çoxluğun k sayda elementlərindən düzələn və bir-birindən ya elementi, ya da düzülüşü ilə fərqlənən permutasiyaların sayına deyilir. Məsələn,

$A = \{a; b; c\}$ çoxluğunda

I. 1 elementli permutasiyalar

$$\{a\}; \{b\}; \{c\} \Rightarrow {}_3 P_1 = 3$$

II. 2 elementli permutasiyalar

$$\left\{ \begin{array}{l} \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\} \\ \{b; a\}; \{c; a\}; \{c; b\} \end{array} \right\} {}_3 P_2 = 6$$

III. 3 elementli permutasiyalar

$$\left\{ \begin{array}{l} \{a; b; c\} \{b; a; c\} \{c; a; b\} \\ \{a; c; b\} \{b; c; a\} \{c; b; a\} \end{array} \right\} {}_3 P_3 = 6$$

❖ n elementli çoxluğun k elementli permutasiyalarının sayı

$${}_n P_k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} n > 0 \\ k \geq 0 \\ n \geq k \end{array} \right.$$

Yaxud

$${}_n P_k = n(n-1)(n-2) \dots [n-(k-1)] = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad (n \geq k)$$

Misal. a) ${}_3 P_2 = 3 \cdot 2 = 6$

b) ${}_5 P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

c) ${}_n P_3 = n(n-1)(n-2)$

d) 5 rəsm əsərini divardakı 3 yerə neçə müxtəlif qaydada asmaq olar?

$${}_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

${}_nP_0 = 1$	${}_4P_1 = 1$
${}_nP_1 = n$	${}_6P_1 = 6$
${}_nP_n = n!$	${}_4P_4 = 4! = 24$
${}_nP_k = n \cdot {}_{n-1}P_{k-1}$	${}_5P_3 = 5 \cdot {}_4P_2$

4. Kombinezon (Birləşmə) ${}_nC_k$

Tərif: Kombinezon – n elementli çoxluğun k sayda elementlərindən düzələn o birləşmələrin sayına deyilir ki, bu birləşmələrin biri digərindən ən azı bir elementinə görə fərqlənir, elementlərinin düzülüşünə görə isə fərqlənmir. Məsələn,

$A = \{a; b; c\}$ çoxluğunda

I. 1 elementli alt çoxluqlar (kombinezonlar)

$$\{a\}; \{b\}; \{c\} \Rightarrow {}_3C_1 = 3$$

II. 2 elementli alt çoxluqlar (kombinezonlar)

$$\{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\} \Rightarrow {}_3C_2 = 3$$

III. 3 elementli kombinezonlar

$$\{a; b; c\} \Rightarrow {}_3C_3 = 1$$

❖ n elementli çoxluğun k elementli kombinezonlarının (alt çoxluqlarının) sayı

$${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Burada

$$\begin{cases} n > 0 \\ k \geq 0 \\ n \geq k \end{cases}$$

Yaxud

$${}_nC_k = \frac{{}_nP_k}{{}_kP_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!}$$

Misal. 10 nəfərlik sinifdə 3 nəfərlik növbətçi qruplarını neçə müxtəlif üsulla təyin etmək olar?

$${}_{10}C_3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

${}_nC_0 = {}_nC_n = 1$	${}_5C_0 = {}_5C_5 = 1$
${}_nC_1 = n$	${}_7C_1 = 7$
${}_nC_k = {}_nC_{n-k}$	${}_{10}C_8 = {}_{10}C_{10-8} = {}_{10}C_2$
${}_nC_k + {}_nC_{k-1} = {}_{n+1}C_k$	${}_8C_4 + {}_8C_3 = {}_9C_4$

Misal. ${}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = \frac{12 \cdot 11}{2!} = 66$

Qeyd. ${}_nC_k = \frac{{}_nP_k}{{}_kP_k} \Rightarrow {}_nP_k = {}_nC_k \cdot {}_kP_k$

Misal: Müxtəlifrəngli 7 qələmdən 3- nü neçə üsulla seçmək olar? ${}_7C_3$

5. Nyuton binomu

$(a+b)^n$ ifadəsinin açılışı Nyuton binomu düsturu adı ilə məşhurdur. Bu düstur əslində ilk dəfə Şərqi görkəmli riyaziyyatçısı Ömər Xəyyam tərəfindən kəşf olunmuşdur. “Binom” sözünün mənası ikihədli deməkdir.

$$(a+b)^n = a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + \dots + {}_nC_k a^{n-k}b^k + \dots + {}_nC_{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

Bu düstura Nyuton binomu deyilir (burada a, b istənilən ədəddir, $n \geq 0$). Düsturdakı ${}_nC_k$ ədədlərinə binomial əmsallar deyilir. Nyuton binomunun aşağıdakı xassələri vardır.

- 1) Verilmiş n üçün binomun açılışında hədlərin sayı $(n+1)$ - dir.
- 2) Binomun açılışı a hərfinin dərəcəsinə nəzərən düzülmüş çoxhədlidir.
- 3) Ayrılışın hər növbəti həddində a - nın qüvvəti bir vahid azalır, b - nin qüvvəti isə bir vahid artır. Lakin hər bir həddə a və b - nin qüvvətinin cəmi dəyişmir və n -ə bərabərdir.
- 4) 1- ci həddin əmsalı vahid, 2- ci həddin əmsalı ${}_nC_1$, 3- cü həddin əmsalı ${}_nC_2$ və s. dir.
- 5) Açılışın 1- ci həddini T_1 , 2- ci həddini T_2 ilə işarə etsək, $(k+1)$ - ci toplanan k -cı hədd hesab olunur.

$$T_{k+1} = {}_nC_k b^k a^{n-k}$$

Bu düstur vasitəsilə binomun açılışındakı istənilən həddi tapmaq olur.

- 6) Açılışda uclardan eyni uzaqlıqda olan binomial əmsallar bərabərdir.

$${}_nC_k = {}_nC_{n-k}$$

- 7) n dərəcəli binomda binomial əmsalların cəmi 2^n - dir.

- 8) Tək yerdə duran binomial əmsalların cəmi, cüt yerdə duran əmsalların cəminə bərabərdir, hər biri isə 2^{n-1} -ə bərabərdir.

9) Binomial əmsallar əvvəl artır, sonra azalır. n cüt olduqda, ayrılışın orta həddinin binomial əmsalı ən böyükdür; n tək olduqda isə iki orta həddin binomial əmsalı bir- birinə bərabər olmaqla ən böyük olur.

10) Binomun qüvvətinin ayrılışında toplananın əmsalı ilə həmin toplananın binomial əmsalı bir- birindən fərqlidir.

11) Binomun düsturunda b- ni (-b) ilə əvəz etsək, onda + və - işarələri növbə ilə dəyişəcəkdir.

$$(a-b)^n = a^n - {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 - {}_nC_3 a^{n-3}b^3 + \dots + (-1)^n b^n$$

12) $(k \cdot a \pm n \cdot b)^m$ mötərizəsini açsaq, əmsalların cəmi $(k \pm n)^m$ olur.

13) k-ci həddin binomial əmsalı $\Rightarrow {}_nC_{k-1}$

14) $(x+y)^{2n}$ binomunun orta həddi $\Rightarrow {}_{2n}C_n x^n y^n$

15) $(x+y)^n$ binomunda $(k+1)$ -ci hədd $\Rightarrow {}_nC_k x^{n-k} y^k$

Misal.

$$\begin{aligned} \text{a) } (2x-3)^5 &= (2x)^5 - {}_5C_1 (2x)^4 \cdot 3^1 + {}_5C_2 (2x)^3 \cdot 3^2 - {}_5C_3 (2x)^2 \cdot 3^3 + {}_5C_4 (2x)^1 \cdot 3^4 - 3^5 = \\ &= 32x^5 - 240x^4 + 720x^3 - 1080x^2 + 810x - 243 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (x+a)^5 &= x^5 + {}_5C_1 x^4 a + {}_5C_2 x^3 a^2 + {}_5C_3 x^2 a^3 + {}_5C_4 x a^4 + a^5 = \\ &= x^5 + 5x^4 a + 10x^3 a^2 + 10x^2 a^3 + 5x a^4 + a^5 \end{aligned}$$

Misal. $(2x-3)^5$ binomunun 4- cü həddini tapın.

$$T_4 = T_{3+1} = {}_5C_3 \cdot 3^3 \cdot (2x)^{5-3} = \frac{{}_5P_3}{3!} \cdot 27 \cdot (2x)^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 27 \cdot 4x^2 = 1080x^2$$

Misal. $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^7$ açılışındakı yeddinci həddi tapın.

$$T_7 = T_{6+1} = {}_7C_6 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^6 \cdot (\sqrt{x})^{7-6} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^{-6} x^{\frac{1}{2}} = 7x^{-\frac{11}{2}}$$

Misal. $\left(x^2 + \frac{2}{x^3}\right)^{15}$ binomunun açılışında x daxil olmayan həddi tapın.

Həlli

$$T_{k+1} = {}_{15}C_k \cdot \left(\frac{2}{x^3}\right)^k \cdot (x^2)^{15-k}$$

$$T_{k+1} = {}_{15}C_k \cdot 2^k \cdot \frac{1}{x^{3k}} \cdot x^{30-2k} = {}_{15}C_k \cdot 2^k \cdot x^{30-2k-3k}$$

$$T_{k+1} = {}_{15}C_k \cdot 2^k \cdot x^{30-5k}$$

O vaxt x dəyişəni daxil olmaz ki, x -in üstü sıfır olsun. Onda $30 - 5k = 0 \Rightarrow k = 6$. Beləliklə,

$$T_{k+1} = T_{7-15} C_6 \cdot 2^6 = \frac{15 \cdot P_6}{6!} \cdot 2^6 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 2^6 = 7 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 64 = 320320$$

Bu həddə x daxil deyil.

Misal. $(x+3)^5$ çoxhədlisinin üçüncü həddinin əmsalını və 3-cü həddinin binomial əmsalını tapın.

$$\begin{aligned} (x+3)^5 &= {}_5C_0 x^5 + {}_5C_1 x^4 \cdot 3 + {}_5C_2 x^3 \cdot 3^2 + {}_5C_3 x^2 \cdot 3^3 + {}_5C_4 x \cdot 3^4 + {}_5C_5 \cdot 3^5 = \\ &= x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243 \end{aligned}$$

Ayrılışda üçüncü toplananın əmsalı 90, onun binomial əmsalı isə ${}_5C_2 = 10$ olur.

Misal. $(2x-3y)^9$ -un ayrılışında a) binomial əmsalların cəmini b) çoxhədlinin əmsallarının cəmini tapın.

Həlli

a) Binomial əmsalların cəmi $2^n = 2^9$

b) $x = 1, y = 1$ götürərək, çoxhədlinin əmsallarının cəmi tapılır.

$$(2x-3y)^9 = (2 \cdot 1 - 3 \cdot 1)^9 = (2-3)^9 = (-1)^9 = -1$$

alınır.

Qeyd: Binomial əmsalların cəmini tap, dedikdə 2^n kimi yazmaq lazımdır.

Məs. $(4x-3)^3$ binomunun ayrılışında binomial əmsalların cəmini tapın.

$$2^3 = 8$$

Binomun açılışında əmsalların cəmini tap dedikdə dəyişənlərin yerinə 1 yazmaq lazımdır.

Məs. $(3x+7)^3$ binomunun açılışında əmsalların cəmini tapın.

$$(3 \cdot 1 + 7)^3 = (3+7)^3 = 10^3 = 1000$$

Paskal üçbucağı (Tusi – Paskal üçbucağı)

Binomial əmsalların üçbucaq şəklində düzülüşünə Paskal üçbucağı deyilir. Nyuton binomu düsturundakı əmsalları Paskal üçbucağından istifadə etməklə daha tez hesablamaq olar. Paskal üçbucağının qurulması belədir. Birinci sətirdə 1 ədədi yazılır. Hər sonrakı sətir vahidlə başlayır və vahidlə də qurtarır. Aradakı ədədlər isə yuxarıdakı sətirdə olan qonşu ədədlərin toplanmasından alınır.

❖ Üçbucağın n -ci sətirində yazılmış binomial əmsalların cəmi 2^n -ə, onların kvadratları cəmi isə ${}_n C_n$ -ə bərabərdir.

❖ n -ci sətirdəki ədədlərin sayı $(n+1)$ olur.

Misal. Paskal üçbucağının 7-ci sətirində duran ədədlərin cəmini tapın. $2^n = 2^7 = 128$

• $a - bi$ ədədinə $z = a + bi$ kompleks ədədinə qoşma olan kompleks ədəd deyilir və $\bar{z} = a - bi$ kimi yazılır.

Qoşma kompleks ədədin həqiqi hissələri bərabərdir, xəyali hissələri isə əksdir.

$D < 0$ olduqda $ax^2 + bx + c = 0$ tənliyinin kökləri qoşma kompleks ədədlərdir.

$$x_1 = a + bi \quad x_2 = a - bi$$

Misal. $x^2 - 2x + m = 0$ tənliyinin köklərindən biri $x_1 = 1 - 3i$ olarsa, $m = ?$

$x_2 = \bar{x}_1 = 1 + 3i$ olduğundan

$$m = x_1 x_2 = (1 - 3i)(1 + 3i) = 1 - 9i^2 = 1 + 9 = 10$$

Misal. $z_1 = 2 - 3i$; $z_2 = 5$; $z_3 = -i$ ədədlərinin həqiqi hissəsini və xəyali hissəsinin əmsalını tapın.

Həlli

$$z_1 = 2 - 3i \Rightarrow a = \operatorname{Re}(z_1) = 2 \quad b = \operatorname{Im}(z_1) = -3$$

$$z_2 = 5 \Rightarrow a = \operatorname{Re}(z_2) = 5 \quad b = \operatorname{Im}(z_2) = 0$$

$$z_3 = -i \Rightarrow a = \operatorname{Re}(z_3) = 0 \quad b = \operatorname{Im}(z_3) = -1$$

Misal. Tənliyi həll edin

$$x^2 - 6x + 13 = 0$$

$$D_1 = 9 - 13 = -4$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{-4}}{1} = 3 \pm \sqrt{-4} = 3 \pm \sqrt{4i^2} = 3 \pm 2i$$

Misal. x və y -in hansı qiymətində $5 + ixy$ və $x + y - 4i$ kompleks ədədləri qoşmadır?

Həlli.

Qoşma kompleks ədədlərin həqiqi hissələri bərabər, xəyali hissələri isə əksdir. Onda

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \text{ və ya } \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \text{ alırıq.}$$

Misal. Elə x və y həqiqi ədədi tapın ki, $(1 + i)x + (1 - i)y = 3 - i$ bərabərliyi doğru olsun.

Həlli.

Bilirik ki, iki kompleks ədəd o vaxt bərabər olur ki, onların həqiqi və xəyali hissələrinin əmsalları bərabər olsun.

$$(1 + i)x + (1 - i)y = 3 - i$$

$$x + xi + y - yi = 3 - i$$

$$x + y + (x - y)i = 3 - i$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \text{Cavab: } (1;2)$$

Misal. Vuruqlara ayırın.

$$\text{a) } a^2 + 4b^2 = a^2 - 4b^2 i^2 = a^2 - (2bi)^2 = (a - 2bi)(a + 2bi)$$

$$\text{b) } x^2 + 10x + 34 = (x+5)^2 + 9 = (x+5)^2 - 9i^2 = (x+5-3i)(x+5+3i)$$

Kompleks ədədlər üzərində əməllər

- İki kompleks ədədi toplamaq üçün onların həqiqi və xəyali hissələrini uyğun olaraq toplamaq lazımdır.

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(6 + 2i) + (-4 - 5i) = 6 + (-4) + 2i + (-5i) = 2 - 3i$$

- İki kompleks ədədi çıxmaq üçün uyğun olaraq onların həqiqi və xəyali hissələrini çıxmaq lazımdır.

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = a - c + (b - d)i$$

$$(0,3 - 2,5i) - (5,7 + 4i) = -5,4 - 6,5i$$

- Qarşılıqlı qoşma kompleks ədədlərin cəmi həqiqi ədəd, fərqi isə xəyali ədəddir.

$$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a$$

$$z - \bar{z} = a + bi - (a - bi) = a + bi - a + bi = 2bi$$

- İki kompleks ədədi vurmaq üçün, onları ikihədlilərin vurulması qaydası ilə vurub, $i^2 = -1$ olduğunu nəzərə almaq lazımdır.

$$(2 - 4i)(2 + 3i) = 4 + 6i - 8i - 12i^2 = 4 - 2i - 12 \cdot (-1) = 16 - 2i$$

- İki qarşılıqlı qoşma kompleks ədədin hasilini həqiqi ədəddir.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

- Kəsr daxil olan ifadələri sadələşdirərkən, kəsrin surət və məxrəcini məxrəcin qoşmasına vurmaq daha səmərəlidir.

Misallar. a) $\frac{3+2i}{1-i} = \frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+3i+2i+2i^2}{1-i^2} = \frac{3+5i+2 \cdot (-1)}{1-(-1)} = \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

b) $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} + \frac{(1-i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} + \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2+2i^2}{1-i^2} =$
 $= \frac{2+(-2)}{1-i^2} = \frac{0}{1-(-1)} = \frac{0}{2} = 0$

ç) $z = 7 - i$ kompleks ədədinin tərs qiymətini tapaq.

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{7-i} = \frac{1(7+i)}{(7-i)(7+i)} = \frac{7+i}{49-i^2} = \frac{7+i}{49+1} = \frac{7+i}{50} = \frac{7}{50} + \frac{1}{50}i$$

d) $(2+3i) \cdot 0, (3) = (2+3i) \cdot \frac{3}{9} = (2+3i) \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + i$

e) $(1-2i)^2 = 1 - 4i + 4i^2 = 1 - 4i + 4 \cdot (-1) = 3 - 4i$

Qeyd: i – nin istənilən natural üstlü qüvvətini hesablamaq olar. i –nin qüvvətini 4-ə bölüb, bu qüvvəti alınan qalıq ilə əvəz edirlər.

$$i^{67} = ? \quad 67 : 4 = 16 \text{ (qalıq 3) olduğundan}$$

$$i^{67} = i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^{4n} = i^0 = 1 \quad i^{20} = i^0 = 1 \quad (20 : 4 \rightarrow \text{qalıq } 0)$$

$$i^{4n+1} = i^1 = i \quad i^{41} = i^1 = i \quad (41 : 4 \rightarrow \text{qalıq } 1)$$

$$i^{4n+2} = i^2 = -1 \quad i^{50} = i^2 = -1 \quad (50 : 4 \rightarrow \text{qalıq } 2)$$

$$i^{4n+3} = i^3 = -i \quad i^{63} = i^3 = -1 \quad (63 : 4 \rightarrow \text{qalıq } 3)$$

Nəticə. $i^2 = -1$ nəzərə alınmaqla kompleks ədədlər üzərində hesab əməlləri həqiqi ədədlər üzərində olduğu kimi aparılır.

Nəticə. Mənfi ədədlərdən kvadrat kök almaq üçün $\sqrt{-a} = \pm \sqrt{a}i$ şərtini yerinə yetirmək lazımdır.

$$\sqrt{-16} = \sqrt{16i^2} = \pm 4i$$

$$\sqrt{-32} = \sqrt{32i^2} = \sqrt{16 \cdot 2i^2} = \pm 4\sqrt{2} i$$

$$\sqrt{-100} = \sqrt{100i^2} = \pm 10i$$

Kompleks ədədlərin həndəsi təsviri

Hər bir $z = a + bi$ kompleks ədədi koordinat müstəvisinin yeganə $(a; b)$ nöqtəsinə uyğun gəlir.

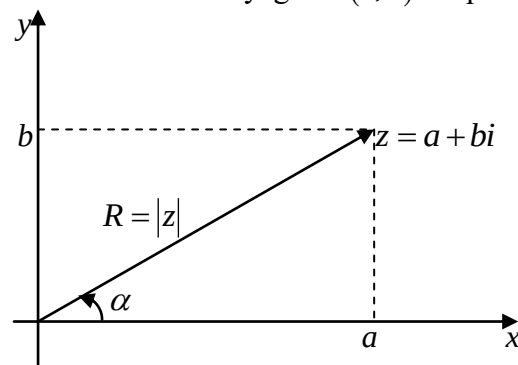
$$z = a + bi \rightarrow (a; b)$$

R - kompleks ədədin modulu

α - kompleks ədədin arqumenti
adlanır.

OX oxu həqiqi ox

OY oxu xəyali ox adlanır.

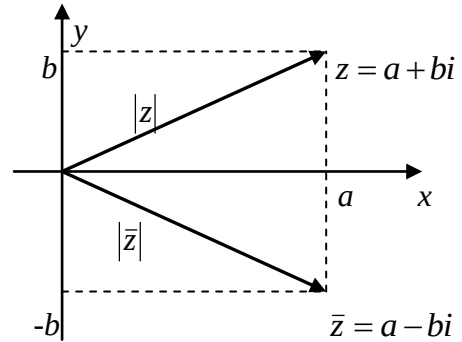


- $(a; b)$ kompleks ədədin dekart koordinatları
- (R, α) kompleks ədədin polyar koordinatları adlanır.

- Qoşma kompleks ədədlər OX oxuna nəzərən simmetrik olur.

$$|z| = |\bar{z}|$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$



Kompleks ədədin modulu

- $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ ədədinə $z = a + bi$ kompleks ədədinin modulu deyilir.

$$|z| = R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z = a + bi \rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\bar{z} = a - bi \rightarrow |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Kompleks ədədin arqumenti

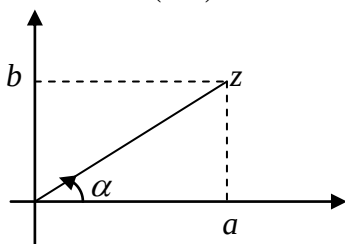
- Kompleks ədədə qarşı qoyulan vektorun həqiqi oxun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucağa kompleks ədədin arqumenti deyilir.

$$\alpha = \arg(z) \in [0; 2\pi)$$

Arqumentin tapılmasını hər rüb üçün ayrıca araşdırmaq.

I rübdə

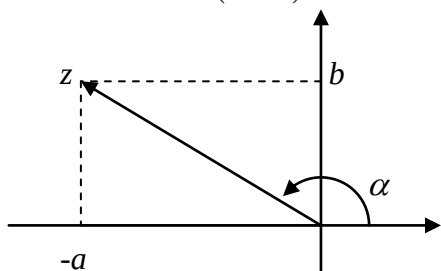
$$z = a + bi \rightarrow (a; b)$$



$$\Rightarrow \alpha = \arctg \left| \frac{b}{a} \right|$$

II rübdə

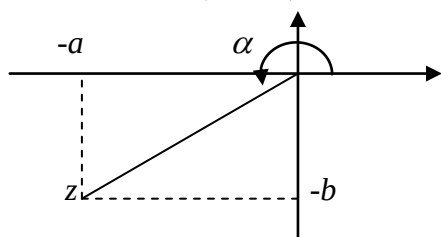
$$z = -a + bi \rightarrow (-a; b)$$



$$\Rightarrow \alpha = \pi - \arctg \left| \frac{b}{a} \right|$$

III rübdə

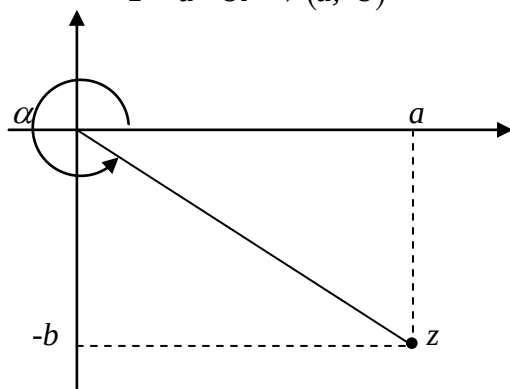
$$z = -a - bi \rightarrow (-a; -b)$$



$$\Rightarrow \alpha = \pi + \arctg \left| \frac{b}{a} \right|$$

IV rübdə

$$z = a - bi \rightarrow (a; -b)$$

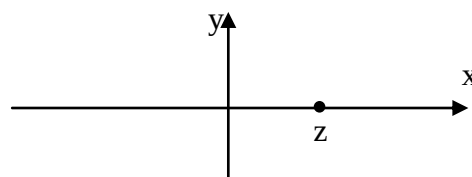


$$\Rightarrow \alpha = 2\pi - \arctg \left| \frac{b}{a} \right|$$

Qeyd. $a \in \mathbb{R}$ olduqda

$$1. z = a \Rightarrow \alpha = 0$$

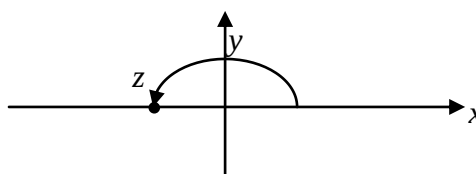
Müsbət həqiqi ədədin argumenti sıfırdır.



$$2. z = -a \Rightarrow \alpha = \pi$$

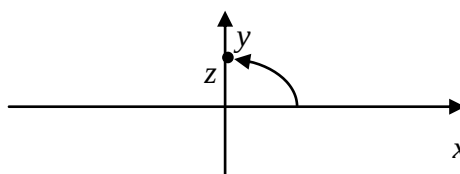
Mənfi həqiqi ədədin argumenti

π -dir.



$$3. z = bi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Əmsalı müsbət olan xəyali ədədin



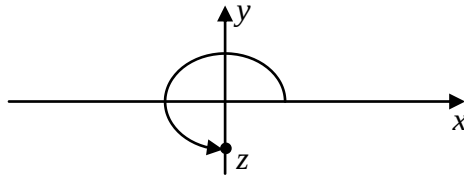
argumenti $\frac{\pi}{2}$ - dir.

$$4. z = -bi \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2}$$

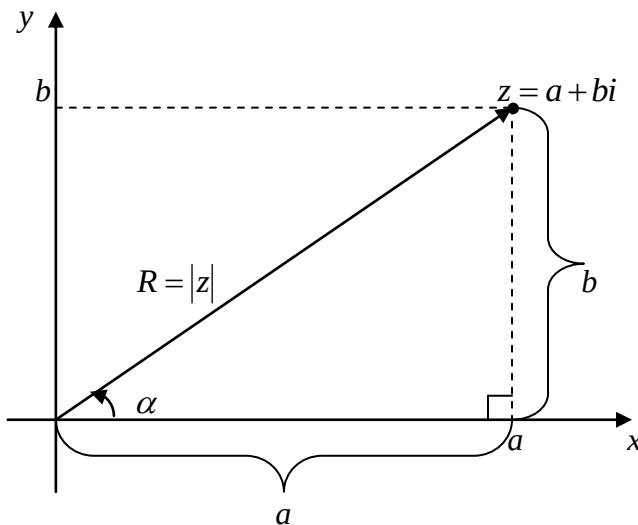
Əmsalı mənfi olan xəyali ədədin

argumenti $\frac{3\pi}{2}$ -dir.

5. $z = 0$ ədədinin argumenti qeyri- müəyyən, modulu isə sıfırdır.



Kompleks ədədin triqonometrik şəkli



$$\Rightarrow \begin{cases} R = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \alpha = \frac{a}{R} \rightarrow a = R \cos \alpha \\ \sin \alpha = \frac{b}{R} \rightarrow b = R \sin \alpha \end{cases}$$

$$z = a + bi = R \cos \alpha + iR \sin \alpha = R(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$z = R(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ yazılışı kompleks ədədin triqonometrik şəkli adlanır.

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a}{R} = \frac{x}{R} \Rightarrow x = R \cos \alpha \\ \sin \alpha &= \frac{b}{R} = \frac{y}{R} \Rightarrow y = R \sin \alpha \end{aligned} \right\}$$

düsturları nöqtənin polyar koordinatları məlum olduqda onun Dekart koordinatlarını tapmağa imkan verir.

● $z = R(\cos \alpha - i \sin \alpha)$, $z = -R(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $z = R(\sin \alpha + i \cos \alpha)$ və s. şəklində göstərilən kompleks ədədlər triqonometrik şəkildə yazılmamışdır.

Misal. $z = -\sqrt{3} + i$ ədədini triqonometrik şəkildə yazın.

$$z = -\sqrt{3} + i \Rightarrow \begin{cases} a = -\sqrt{3} \\ b = 1 \end{cases}$$

$$R = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

$(a;b) \Rightarrow (-\sqrt{3};1)$ II rübdə yerləşdiyindən

$$\alpha = \pi - \operatorname{arctg} \left| \frac{1}{-\sqrt{3}} \right| = \pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$z = R(\cos \alpha + i \sin \alpha) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

Misal. $z = 3i$ ədədini triqonometrik şəkildə yazın.

$$z = 3i = 0 + 3i$$

$R = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$; $z = 3i$ kompleks ədədi əmsalı müsbət olan xəyali ədəddir. Onun argumenti $\frac{\pi}{2}$ -dir. Onda alırıq ki, $3i = 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

Misal. $z = 5$ ədədini triqonometrik şəkildə yazın.

$$z = 5 + 0 \cdot i \Rightarrow R = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$$

Bu ədəd müsbət həqiqi ədəddir. Müsbət həqiqi ədədin argumenti sıfırdır. Onda $\varphi = 0$ və $5 = 5(\cos 0 + i \sin 0)$

Misal. $A(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ nöqtəsinin polyar koordinatlarını tapın.

$$R = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\alpha = 2\pi - \operatorname{arctg} \left| \frac{b}{a} \right| = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Ona görə də, A nöqtəsinin polyar koordinatları $\left(2; \frac{7\pi}{4} \right)$ -dir.

Misal. $A\left(3; \frac{2\pi}{3} \right)$ nöqtəsinin Dekart koordinatlarını tapın.

$$x = R \cos \alpha = 3 \cos \frac{2\pi}{3} = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = -1,5$$

$$y = R \sin \alpha = 3 \sin \frac{2\pi}{3} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,5\sqrt{3}$$

Cavab: $(-1,5; 1,5\sqrt{3})$

Misal. $z = 6 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ ədədini cəbri şəkildə yazın.

$$\cos \frac{3\pi}{4} = \cos 135^\circ = \cos(90 + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin 135^\circ = \sin(90 + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Onda

$$z = 6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$$

Misal. $z = -3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ kompleks ədədin triqonometrik şəklində yazılışı deyil.

Çünki, modul mənfi ola bilməz. Ona görə də

$$\begin{aligned} z &= 3\left(-\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}\right) = 3\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right] = \\ &= 3\left[\cos \frac{5\pi}{6} - i \sin \frac{5\pi}{6}\right] = 3\left[\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right] = \\ &= 3\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right] \end{aligned}$$

(Çevirmə düsturları və kosinusun cütlüyünə görə)

Misal. Hesablayın. $(-\sqrt{3} - i)^6 = ?$

Əvvəlcə triqonometrik şəkildə yazmaq, nöqtə $A(-\sqrt{3}; -1)$ -dir.

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\alpha = \pi + \arctg\left|\frac{b}{a}\right| = \pi + \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

$$\text{Onda } z = 2\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$$

$$\text{Beləliklə, } z^6 = 2^6\left(\cos \frac{7\pi}{6} \cdot 6 + i \sin \frac{7\pi}{6} \cdot 6\right) = 64(\cos 7\pi + i \sin 7\pi) = 64(-1 + 0) = -64$$

Misal. $-3\left(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}\right)$ ədədini triqonometrik şəkildə göstərin.

$$-3\left(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}\right) = 3\left(-\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right) = 3\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)\right] = 3\left[\cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}\right]$$

Triqonometrik şəkildə verilmiş kompleks

ədədlər üzərində əməllər

$$z_1 = R_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) \text{ və}$$

$$z_2 = R_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) \text{ ədədləri verildikdə}$$

I. Bərabərlik şərti

$$z_1 = z_2 \Rightarrow \begin{cases} R_1 = R_2 \\ \alpha_1 = \alpha_2 + 2\pi k \end{cases}$$

II. Toplanması və çıxılması

$$z_1 + z_2 = (R_1 \cos \alpha_1 + R_2 \cos \alpha_2) + i(R_1 \sin \alpha_1 + R_2 \sin \alpha_2)$$

$$z_1 - z_2 = (R_1 \cos \alpha_1 - R_2 \cos \alpha_2) + i(R_1 \sin \alpha_1 - R_2 \sin \alpha_2)$$

III. Vurulması

$$z_1 \cdot z_2 = R_1 R_2 (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$$

$$\begin{cases} \text{modullar vurulur} \\ \text{arqumentlər toplanır} \end{cases}$$

IV. Bölünməsi

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1}{R_2} (\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2))$$

$$\begin{cases} \text{modullar bölünür} \\ \text{arqumentlər çıxılır} \end{cases}$$

V. n –ci dərəcədən qüvvəti

$$Z^n = R^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$$

modulu n-ci dərəcədən qüvvətə yüksəldilir, arqumenti n-ə vurulur.

VI. n-ci dərəcədən kökü

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{R} \left(\cos \frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi k}{n} \right)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Qeyd: Xüsusi halda, $R = 1$ olduqda

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

düsturuna Muavr düsturu deyilir.

Misal. $2x^4 + x^2 - 3$ çoxhədlisini xətti vuruqlarına ayırın.

$$2x^4 + x^2 - 3 = 0 \quad x^2 = t \quad \text{olsun}$$

$$2t^2 + t - 3 = 0$$

$$D = 25$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = -\frac{3}{2}$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \quad x^2 = -\frac{3}{2}$$

$$x_3 = \sqrt{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}i^2 = i\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$x_4 = -\sqrt{-\frac{3}{2}} = -\sqrt{\frac{3}{2}}i^2 = -i\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$2x^4 + x^2 - 3 = 2(x-1)(x+1)\left(x-i\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x+i\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

Misal. Yüksəkdərəcəli həddinin əmsalı 5, kökləri isə $1; 3+i$ və $3-i$ olan ən kiçik dərəcəli tənliyi qurun.

$$5(x-1)(x-3-i)(x-3+i)=0$$

$$5(x-1)((x-3)^2 - i^2) = 0$$

$$5(x-1)(x^2 - 6x + 9 + 1) = 0 \Rightarrow 5(x-1)(x^2 - 6x + 10) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x^3 - 35x^2 + 80x - 50 = 0$$

İbtidai funksiya

❖ Verilmiş aralığın bütün nöqtələrində $F'(x) = f(x)$ bərabərliyi ödənərsə, onda $F(x)$ funksiyasına həmin aralıqda $f(x)$ funksiyaının ibtidai funksiyası deyilir.

Məsələn, a) $\sin' x = \cos x$ olduğu üçün $F(x) = \sin x$ funksiyası $f(x) = \cos x$ funksiyaının ibtidai funksiyasıdır.

b) $F(x) = 3x^4$ funksiyası $f(x) = 12x^3$ funksiyaının ibtidai funksiyasıdır, çünki

$$F'(x) = (3x^4)' = 12x^3 = f(x)$$

c) $F(x) = \ln(-x)$ funksiyası $(-\infty; 0)$ aralığında $f(x) = \frac{1}{x}$ - in ibtidai funksiyasıdır. Çünki,

$$F'(x) = [\ln(-x)]' = -\frac{1}{x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}$$

❖ Tutaq ki, $F(x)$ funksiyası verilmiş aralıqda $f(x)$ - in ibtidai funksiyasıdır. Onda, ixtiyari C – sabit ədədi üçün $F(x) + C$ funksiyası da $f(x)$ - in ibtidai funksiyasıdır. $F(x) + C$ - yə ibtidai funksiyaların ümumi şəkli deyilir.

❖ $f(x)$ funksiyaının istənilən iki ibtidai funksiyasından birinin qrafiki digərinin qrafikindən OY oxu boyunca paralel köçürməklə alınır.

❖ Hər bir kəsilməz funksiyanın ibtidai funksiyası var.

Misal. $f(x) = 2x$ funksiyaının ibtidai funksiyasını tapın.

$$F(x) = x^2$$

$$F(x) = x^2 + C, \text{ burada } C = \text{const}$$

Misal. $f(x) = 2x$ funksiyasının $M(2;8)$ nöqtəsindən keçən ibtidai funksiyasını tapın.

$$F(x) = x^2 + C$$

$$2^2 + C = 8 \Rightarrow 4 + C = 8 \Rightarrow C = 4$$

Deməli,

$$F(x) = x^2 + 4$$

❖ Törəməsinə görə funksiyanın özünün tapılması əməli, yəni ibtidai funksiyanın tapılması törəmənin tapılmasının tərs əməlidir. Bu əmələ inteqrallama əməli deyilir.

Qeyri- müəyyən inteqral

Verilmiş $f(x)$ funksiyasının bütün ibtidai funksiyalarının ümumi ifadəsinə onun qeyri-müəyyən inteqralı deyilir və $\int f(x)dx$ kimi işarə olunur. $f(x)$ - inteqralaltı funksiya; $f(x)dx$ - inteqralaltı ifadə, x -ə isə inteqrallama dəyişəni deyilir.

$$\text{Tərifə görə } \int f(x)dx = F(x) + C$$

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

Qeyri-müəyyən inteqralın əsas xassələri

1) Qeyri-müəyyən inteqralın törəməsi inteqralaltı funksiya bərabərdir

$$\left[\int f(x)dx \right]' = f(x)$$

2) Kəsilməz törəməsi olan $F(x)$ funksiyasının törəməsinin qeyri- müəyyən inteqralı onun özündən sabit toplananla fərqlənir.

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

3) Sıfırdan fərqli sabit vuruğu qeyri-müəyyən inteqral işarəsi xaricinə çıxarmaq olar.

$$\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx, \text{ burada } C \neq 0$$

4) Cəmin inteqralı toplananların inteqralları cəminə bərabərdir.

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Əsas inteqrallar cədvəli

$$1) \int dx = x + C$$

$$2) \int k dx = kx + C \quad (k \text{ və } C - \text{sabitdir})$$

$$3) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$4) \int (kx+b)^n dx = \frac{(kx+b)^{n+1}}{k(n+1)} + C$$

$$5) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$6) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$7) \int \frac{1}{kx+b} dx = \frac{1}{k} \ln|kx+b| + C$$

$$8) \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$9) \int e^x dx = e^x + C$$

$$10) \int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$$

$$11) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$12) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$13) \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$$

$$14) \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$$

$$15) \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$16) \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$17) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$18) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$19) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$$

$$20) \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$$

$$21) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$22) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$23) \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$24) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$$

$$25) \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C$$

Misallar:

$$a) \int \frac{5}{8} x^4 dx = \frac{5}{8} \cdot \frac{x^5}{5} + C = \frac{x^5}{8} + C$$

$$b) \int \frac{3}{5x^3} dx = \frac{3}{5} \int x^{-3} dx = \frac{3}{5} \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{3}{10x^2} + C$$

$$c) \int \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} dx = \int \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} dx = \int (x+3) dx = \frac{x^2}{2} + 3x + C$$

$$ç) \int \frac{x^3 + 6}{x^2} dx = \int \left(x + \frac{6}{x^2} \right) dx = \int x dx + 6 \int x^{-2} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{6}{x} + C$$

$$d) \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$$

$$e) \int 2^{5x} dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{2^{5x}}{\ln 2} + C = \frac{2^{5x}}{5 \ln 2} + C = \frac{32^x}{\ln 32} + C$$

$$ə) \int \frac{1}{(7-3x)^5} dx = \int (7-3x)^{-5} dx = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(7-3x)^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{12(7-3x)^4} + C$$

$$z) \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$f) \int \frac{1}{7x-2} dx = \frac{1}{7} \ln |7x-2| + C$$

$$g) \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{(-\cos x)'}{\cos x} dx = -\int d \ln \cos x = -\ln \cos x + C$$

$$h) \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \int \ln x \cdot (\ln x)' dx = \int d \left(\frac{\ln^2 x}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$$

$$l) \int \operatorname{tg} 2x dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{d(\cos 2x)}{\cos 2x} = -\frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + C$$

$$i) \int \operatorname{ctg} \frac{x}{3} dx = \int \frac{\cos \frac{x}{3}}{\sin \frac{x}{3}} dx = 3 \int \frac{d \left(\sin \frac{x}{3} \right)}{\sin \frac{x}{3}} = 3 \ln \left| \sin \frac{x}{3} \right| + C$$

Dəyişənin əvəzedilməsi üsulu ilə

inteqralın hesablanması

Bu üsulla inteqralı hesablayarkən elə əvəzləmə seçmək lazımdır ki, inteqralı daha asan hesablamaq mümkün olsun. Nəticədə əvvəlki dəyişənə qayıtmaq lazımdır.

a) $\int \sqrt[3]{x+1} dx$ inteqralını hesablayın.

$\sqrt[3]{x+1} = t$ olsun. Onda $(\sqrt[3]{x+1})^3 = t^3 \Rightarrow x+1 = t^3 \Rightarrow x = t^3 - 1 \Rightarrow dx = 3t^2 dt$

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{x+1} dx &= \int t \cdot 3t^2 dt = \int 3t^3 dt = 3 \cdot \frac{t^4}{4} + C = \frac{3}{4} t^4 + C = \\ &= \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x+1)^3} \cdot \sqrt[3]{x+1} + C = \frac{3}{4} (x+1) \sqrt[3]{x+1} + C\end{aligned}$$

b) $\int x \sin(x^2) dx$ - i hesablayın.

$x^2 = t$ olsun. Onda $2x dx = dt \Rightarrow x dx = \frac{dt}{2}$

$$\int \sin t \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t + C = -\frac{1}{2} \cos(x^2) + C$$

c) $\int \sin^3 x \cos x dx$ - i tapın.

$\sin x = t$ olsun. Onda alınır ki, $\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} \sin^4 x + C$$

d) $\int x e^{-x^2} dx$

$-x^2 = t$ olsun $\Rightarrow -2x dx = dt \Rightarrow x dx = -\frac{1}{2} dt$. Onda

$$\int x e^{-x^2} dx = \int -\frac{1}{2} e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

e) $\int \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 + 5} dx$ - i hesablayın

$x^3 + 3x^2 + 5 = t$ qəbul edək. Bərabərliyin hər iki tərəfini diferensiallayaq.

$$(3x^2 + 6x) dx = dt$$

$$3(x^2 + 2x) dx = dt$$

$$(x^2 + 2x) dx = \frac{dt}{3} \text{ Onda}$$

$$\int \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 + 5} dx = \int \frac{\frac{dt}{3}}{t} = \frac{1}{3} \ln|t| + C = \frac{1}{3} \ln|x^3 + 3x^2 + 5| + C$$

Hissə - hissə integrallama düsturu

Tutaq ki, $u(x), v(x), u'(x), v'(x)$ kəsilməz funksiyalardır. Onda $\int u dv = uv - \int v du$ bərabərliyi doğrudur. Bu düstura hissə- hissə integrallama düsturu deyilir.

a) $\int x \sin x dx$ - i hesablayın.

$$dv = \sin x dx$$

$u = x$ əvəzləməsi qəbul edək. Onda

$$du = dx$$

$$v = -\cos x$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

b) $\int x \ln x dx$ - i hesablayın

$$u = \ln x \text{ isə } du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x dx \text{ isə, } v = \frac{x^2}{2}$$

Onda

$$\int x \ln x dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2} dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

c) $\int \ln x dx$ - i tapın.

Həlli

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

d) $\int x^2 \cos x dx$ - i tapın.

$$\left. \begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \cos x dx \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = \sin x \end{array}$$

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int \sin x \cdot 2x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C,$$

Burada

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

e) $\int \arctg x dx$ - i hesablayın

$$\left. \begin{array}{l} u = \arctg x \\ dv = dx \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} du = \frac{dx}{1+x^2} \\ v = x \end{array}$$

Onda

$$\int \arctg x dx = x \arctg x - \int x \cdot \frac{dx}{1+x^2} = x \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

Əvvəlcə $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ inteqralını tapaq. $x^2 = t$ əvəzləməsi qəbul edək. Onda

$$2x dx = dt \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dt$$

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{1+t} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+1} dt = \frac{1}{2} \ln|1+t| + C = \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$$

Bunu əvvəldə yerinə yazaq. Onda

$$\int \arctg x dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C \text{ alarıq.}$$

ə) $\int \arccos x dx$ - i hesablayın

$$\left. \begin{array}{l} u = \arccos x \\ dv = dx \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = x \end{array}$$

$$\int \arccos x dx = \arccos x \cdot x - \int x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Axırıncıda $1-x^2 = t$ qəbul edək və hər iki tərəfini diferensiallayaq. $-2x = dt$ alınar. Buradan

$x = -\frac{dt}{2}$, onda

$$x \arccos x + \int -\frac{dt}{2\sqrt{t}} = x \arccos x - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

Müəyyən inteqral

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a; b]$ parçasında kəsilməzdir. $F(x)$ funksiyası isə onun hər hansı ibtidai funksiyasıdır, yəni $F'(x) = f(x)$. Onda $F(b) - F(a)$ fərqi $f(x)$ funksiyasının

$[a; b]$ parçasında müəyyən inteqralı deyilir və bu inteqral $\int_a^b f(x) dx$ kimi işarə olunur.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

a – ya inteqralın aşağı sərhəddi, b -yə isə yuxarı sərhəddi deyilir. Bu düstura Nyuton – Leybnis düsturu deyilir.

❖ Müəyyən inteqral ibtidai funksiyanın $[a;b]$ parçasındaki artımıdır. Müəyyən inteqralın qiymətini hesablamaq üçün

- 1) $f(x)$ - in hər hansı $F(x)$ ibtidai funksiyası tapılır.
- 2) bu ibtidai funksiyanın a və b nöqtələrindəki $F(b)$ və $F(a)$ qiymətləri hesablanır
- 3) $F(b) - F(a)$ fərqi tapılır.

Misal: $\int_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$

Müəyyən inteqralın xassələri

- 1) Müəyyən inteqralın qiyməti inteqrallama dəyişənindən asılı deyil,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz$$

- 2) İnteqralın sərhədləri eyni olduqda inteqral sıfıra bərabərdir.

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

- 3) Müəyyən inteqralda aşağı və yuxarı sərhədlərin yerini dəyişdikdə inteqralın işarəsi əksinə dəyişir, yəni

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

- 4) İstənilən a, b və c ($a \leq c \leq b$) üçün $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ doğrudur.

- 5) İstənilən C ($C \neq 0$) ədədi üçün sabit vuruğu müəyyən inteqral işarəsi xaricinə çıxarmaq olar.

$$\int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx, \text{ burada } C \neq 0$$

- 6) Cəmin inteqralları inteqralların cəminə bərabərdir.

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

- 7) $f(x)$ funksiyası tək funksiya olarsa, istənilən a üçün simmetrik parça üzrə inteqralı sıfıra bərabərdir.

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

- 8) $f(x)$ funksiyası cüt funksiya olarsa, istənilən a üçün

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

$$a) \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{0}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$b) \int_0^1 (x-2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2} - 2 \cdot 1 \right) - \left(\frac{0^2}{2} - 2 \cdot 0 \right) = -1,5$$

$$c) \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

$$ç) \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 6x + 9} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-3)^2} = - \frac{1}{x-3} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$d) \int_{-3}^3 \frac{x^2 \sin 5x}{x^4 + 1} dx = 0, \text{ ç\u00fcnk\u00fc, } \text{inteqralalt\u00fa funksiya t\u00e9k, } \text{inteqrallama s\u00e9rh\u00e9dl\u00e9ri is\u00e9 simmetrikdir.}$$

$$ə) \int_{-2}^2 x \cos x + |x| dx = \int_{-2}^2 x \cos x dx + \int_{-2}^2 |x| dx = 0 + 2 \int_0^2 |x| dx = 2 \int_0^2 x dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 4$$

ç\u00fcnk\u00fc, $x \cos x$ funksiyası t\u00e9k, $|x|$ funksiyası c\u00fct, inteqrallama s\u00e9rh\u00e9dl\u00e9ri is\u00e9 simmetrikdir. Burada 7 v\u00e9 8 – ci xass\u00e9l\u00e9r t\u00e9tb\u00e9q olunmu\u015fdur.

$$f) \int_6^7 \frac{x+2}{x-5} dx = \int_6^7 \frac{x-5+7}{x-5} dx = \int_6^7 \left(1 + \frac{7}{x-5} \right) dx = \int_6^7 dx + \int_6^7 \frac{7}{x-5} dx = x \Big|_6^7 + 7 \ln|x-5| \Big|_6^7 =$$

$$= (7-6) + 7[\ln(7-5) - \ln(6-5)] = 1 + 7(\ln 2 - \ln 1) = 1 + 7 \ln 2 = 1 + \ln 128$$

Əyrixətli trapesiyanın sahəsi

$[a; b]$ parçasında kəsilməz və mənfi olmayan $y = f(x)$ funksiyası verilmişdir.

Müstəvinin $y = f(x)$ əyrisi, absis oxu və $x = a$, $x = b$ düz xətləri hüdudlanmış hissəsinə əyrixətli trapesiya deyilir.

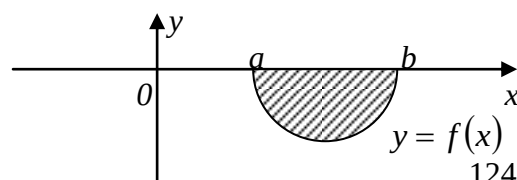
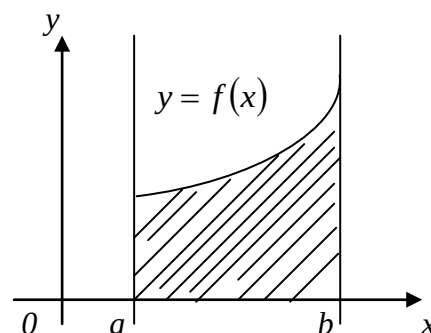
Şəkildəki əyrixətli trapesiyanın

sahəsi $S = \int_a^b f(x)dx$ kimi tapılır.

1) $[a; b]$ parçasında kəsilməz funksiya

müsbət olmayan qiymətlər alırsa, $(f(x) \leq 0)$ onda

uyğun əyrixətli trapesiyanın sahəsi



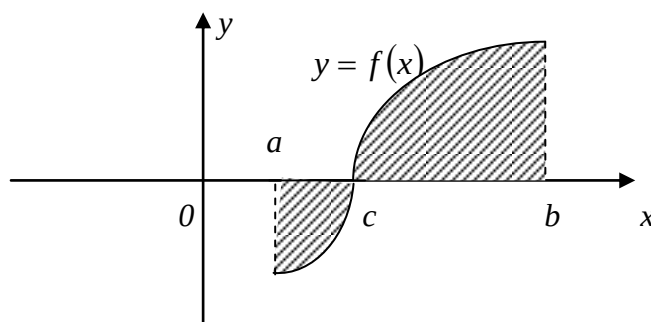
$$S = -\int_a^b f(x)dx \quad \text{və ya} \quad S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$$

düsturu ilə hesablanır.

2) $[a; b]$ parçasında kəsilməz $f(x)$ funksiyası, müxtəlif işarəli qiymətlər alırsa, onda $[a; b]$ parçasında elə hissələrə bölmək lazımdır ki, bu hissələrdə funksiya öz işarəsini sabit saxlasın. Sonra isə (1) düsturu bu hissələrin hər birində uyğun sahələri hesablamaq, alınan nəticələri toplamaq lazımdır.

$$S = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\text{və ya} \quad S = \left| \int_a^c f(x)dx \right| + \int_c^b f(x)dx$$

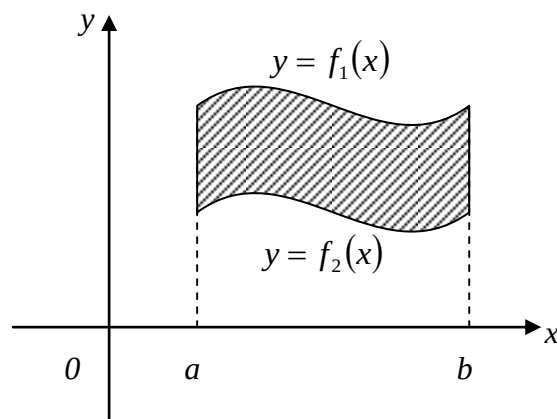


3) $f_1(x)$ və $f_2(x)$ kəsilməz funksiyaların qrafikləri, $x = a$ və $x = b$ düz xətləri ilə məhdud sahə ($f_1(x) \geq f_2(x)$, $x \in [a; b]$ isə), onda

$$S = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx$$

düsturu ilə hesablanmalıdır. Ümumi halda isə

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx$$



düsturu ilə hesablanır.

Misallar: 1) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$ xətləri ilə hüdudlanmış fiqurun sahəsini tapın.

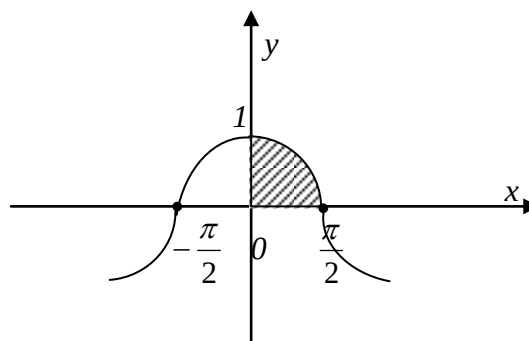
Həlli

$$S = \int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = \frac{27}{3} - \frac{0}{3} = 9$$

2) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ xətləri ilə hüdudlanmış fiqurun sahəsini tapın.

Həlli

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$



3) $y = x^2$ və $y = 4$ düz xətti ilə hüdudlanmış fiqurun sahəsini tapın.

$y = x^2$ və $y = 4$ -dən $x^2 = 4$. Onda $x = \pm 2$.

$$S = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^2 = \left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left(4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right) = 16 - 5\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}$$

4) $y = x^2 - 1$ və $y = x - 1$ xətləri ilə həddüdlənmiş sahəni tapın.

Sərhədləri tapaq: $x^2 - 1 = x - 1 \Rightarrow x = 0 \quad x = 1$.

$$S = \int_0^1 (x - 1 - x^2 + 1) dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{6}$$

5) $y = 2x + 3$ düz xətti və $y = x^2$ parabolası ilə həddüdlənmiş fiqurun sahəsini tapın.

Həlli

İlk öncə kəsişmə nöqtələrinin absislərini tapaq.

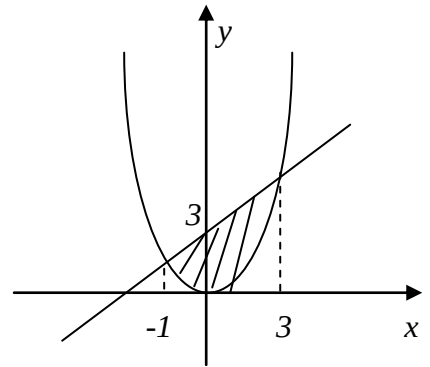
$$x^2 = 2x + 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -1$$

$$S = \int_{-1}^3 (2x + 3 - x^2) dx = \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^3 = \left(x^2 + 3x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^3 =$$

$$= \left(3^2 + 3 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} \right) - \left((-1)^2 + 3 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) = (9 + 9 - 9) - \left(1 - 3 + \frac{1}{3} \right) = 9 + 2 - \frac{1}{3} = 11 - \frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}$$



6) $y = x^2 - 6x + 8$ parabolası, Ox oxu, $x = 1$, $x = 6$ düz xətləri ilə həddüdlənmiş fiqurun sahəsini tapın.

Parabolanın absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin absislərini tapaq.

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 4$$

Aydındır ki, $x \in [1; 2] \cup [4; 6]$ üçün $y \geq 0$,

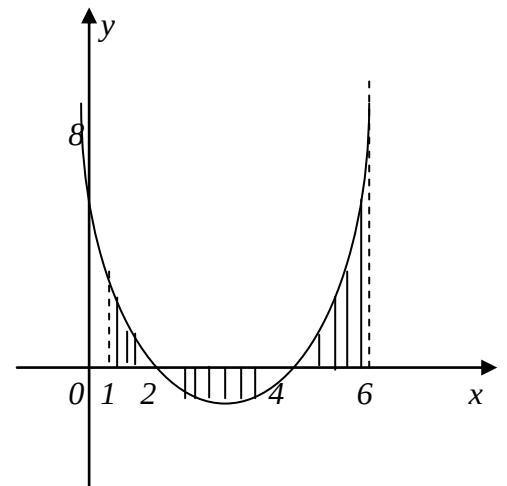
$x \in [2; 4]$ üçün isə $y \leq 0$ - dir. Ona görə də

$$S = \int_1^2 (x^2 - 6x + 8) dx - \int_2^4 (x^2 - 6x + 8) dx + \int_4^6 (x^2 - 6x + 8) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right) \Big|_1^2 - \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right) \Big|_2^4 + \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right) \Big|_4^6 =$$

$$= \frac{8}{3} - 12 + 16 - \frac{1}{3} + 3 - 8 - \frac{64}{3} + 48 - 32 + \frac{8}{3} - 12 + 16 + \frac{216}{3} - 108 + 48 - \frac{64}{3} + 48 - 32 =$$

$$= \frac{103}{3} - 25 = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$$



Müəyyən integralın bəzi tətbiqləri

- ❖ Əyrixətli trapesiyanın absis oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmi

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

düsturu ilə hesablanır.

- ❖ Cisim dəyişən qüvvənin təsiri ilə hərəkət etdikdə görülən iş

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

düsturu ilə hesablanır.

- ❖ Sıxlığı $f(x)$ olan maddi çubuğun kütləsi

$$m = \int_a^b f(x) dx$$

düsturu ilə hesablanır.

- ❖ $S(x)$ perpendikulyar kəsiyinin sahəsinə görə cismin həcmi

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

düsturu ilə hesablanır.

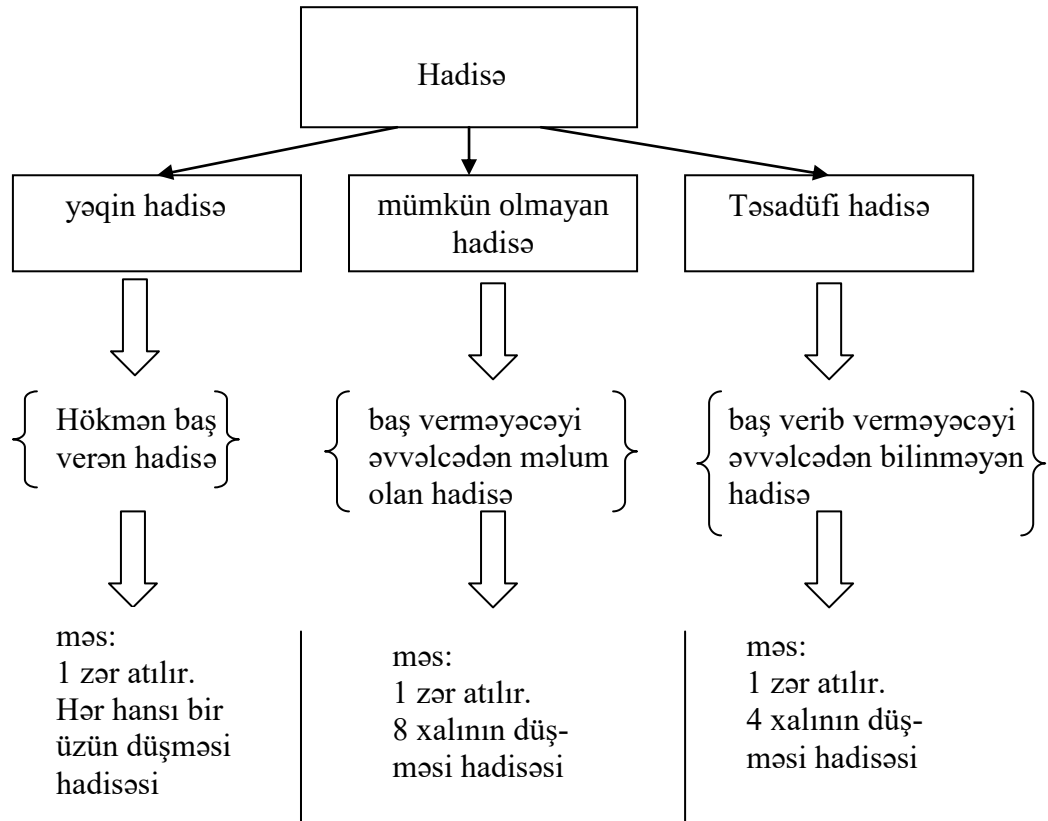
Ehtimal nəzəriyyəsi

1. Hadisə anlayışı

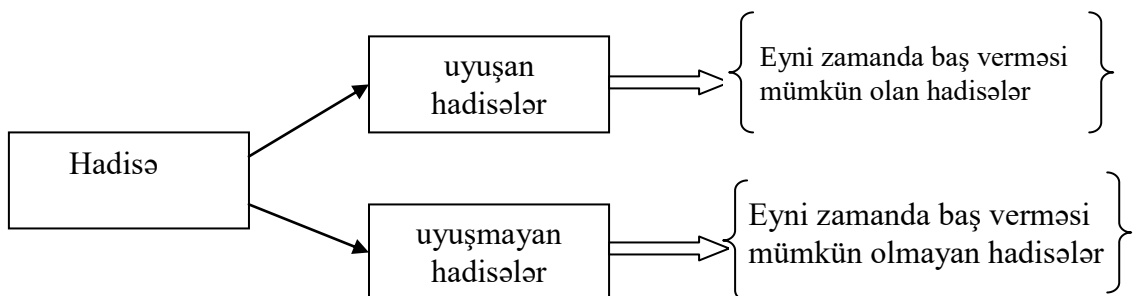
Tərif: Təcrübənin, sınağın, müşahidənin hər bir nəticəsi elementar hadisə adlanır.

Tərif: Sınaq nəticəsində baş verən elementar hadisələrin müəyyən çoxluğuna təsadüfi hadisə deyilir.

❖ Hadisələr baş verib verməməsinə görə 3 qrupa ayrılır:



Uyuşan və uyuşmayan hadisələr.



Misal (*uyuşan hadisə*)

Dəmir pul və zər eyni anda atılır.

A hadisəsi pulda gerb üzünün düşməsi

B hadisəsi zərdə 2 xalının düşməsi

olarsa A və B eyni anda baş verə bilər. Yəni A və B uyuşan hadisələrdir.

Misal (*uyuşmayan hadisə*)

Bir zər atılır.

A hadisəsi 3 xalının düşməsi

B hadisəsi 4 xalının düşməsi

olarsa, onda A və B hadisələri eyni anda baş verə bilməz. Yəni A və B uyuşmayan hadisələrdir.

Asılı olan və asılı olmayan hadisələr

Tərif. A hadisəsinin baş verməsi B hadisəsinin baş verməsinə təsir edirsə, A və B asılı olan hadisələr adlanır.

Məsələn, qutuda 3 ağ, 5 qara şar var. Qutudan bir şar çıxarılıb kənara qoyulur. Yenidən bir şar çıxarılır. Hər iki şarın eyni rəngli olması hadisələri asılı olan hadisələrdir.

Tərif. A hadisəsinin baş verməsi B hadisəsinin baş verməsinə təsir etmirsə, A və B asılı olmayan hadisələr adlanır.

Məsələn, dəmir pul və zər eyni anda atılır. Pulda xəritə, zərdə isə 4 xalının düşməsi hadisələri asılı olmayan hadisələrdir.

❖ Hadisə üçün bütün hallar və əlverişli halların sayını araşdıraraq.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{bütün halların sayı} \rightarrow n \\ \text{əlverişli halların sayı} \rightarrow m \end{array} \right.$$

olsun.

Misal. A hadisəsi bir dəmir pul bir dəfə atılan zaman xəritə üzünün düşməsi olarsa,

Bütün hallar = {xəritə}; {şəbəkə} $\rightarrow n = 2$

Əlverişli hallar = {xəritə} $\rightarrow m = 1$

Misal. B hadisəsi bir zər bir dəfə atılarkən cüt xalın düşməsi olarsa,

Bütün hallar $\Rightarrow \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{5\}; \{6\} \rightarrow n = 6$

Əlverişli hallar $\Rightarrow \{2\}; \{4\}; \{6\} \rightarrow m = 3$

Misal. C hadisəsi 2 zər atılarkən qoşa xal düşməsi olsun.

Bütün hallar

$$\left. \begin{array}{l} \{1;1\} \quad \{2;1\} \quad \{3;1\} \quad \{4;1\} \quad \{5;1\} \quad \{6;1\} \\ \{1;2\} \quad \{2;2\} \quad \{3;2\} \quad \{4;2\} \quad \{5;2\} \quad \{6;2\} \\ \{1;3\} \quad \{2;3\} \quad \{3;3\} \quad \{4;3\} \quad \{5;3\} \quad \{6;3\} \\ \{1;4\} \quad \{2;4\} \quad \{3;4\} \quad \{4;4\} \quad \{5;4\} \quad \{6;4\} \\ \{1;5\} \quad \{2;5\} \quad \{3;5\} \quad \{4;5\} \quad \{5;5\} \quad \{6;5\} \\ \{1;6\} \quad \{2;6\} \quad \{3;6\} \quad \{4;6\} \quad \{5;6\} \quad \{6;6\} \end{array} \right\} n = 36$$

Əlverişli hallar

$$\{1;1\} \quad \{2;2\} \quad \{3;3\} \quad \{4;4\} \quad \{5;5\} \quad \{6;6\} \rightarrow m = 6$$

Qeyd.

- ❖ 1 zər atıldıqda bütün halların sayı

$$m = 6^1 = 6$$

- ❖ 2 zər atıldıqda bütün halların sayı

$$m = 6^2 = 36$$

- ❖ 3 zər atıldıqda bütün halların sayı

$$m = 6^3 = 216$$

Qayda 1. Hər hansı bir K hadisəsinin n dəfə sınaqdan keçirilməsi zamanı mümkün

halların sayı aşağıdakı düsturla hesablanır: K^n

Məsələn, zərin 3 dəfə atılması halında neçə mümkün hal vardır? Zərin 6 üzü olduğundan

$6^3 = 216$ mümkün hal vardır.

Qayda 2. Əgər birinci sınaqda K_1 hadisəsi, ikinci sınaqda K_2 hadisəsi və üçüncü sınaqda

K_n hadisəsi varsa, mümkün halların sayı $K_1 \cdot K_2 \cdot \dots \cdot K_n$ olur.

Məsələn, Siz həftə sonu alış-veriş mağazasına getmək istəyirsiniz, restoranda yemək yemək istəyirsiniz və kinoya baxmaq istəyirsiniz. Deyək ki, seçimləriniz arasında 3 alış-veriş mağazası, 4 restoran və 6 kino var. Bunları nəzərə alaraq, həftə sonu neçə cür mümkün hal kombinasiyası var? $3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$ mümkün hal

Qayda 3. n ədədinin sıralanmasında mümkün halların sayı belədir:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Məsələn, tutaq ki, kitab rəfinə qoymaq üçün Sizin 5 ədəd kitabınız var. Bu kitablar rəfə neçə üsulla qoyula bilər?

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \text{ mümkün hal var}$$

Qayda 4. (Permutasiya) n ədəddən X -in sıralanmasında mümkün halların sayı belə tapılır:

$${}_n P_x = \frac{n!}{(n-x)!}$$

Məsələn, tutaq ki, Siz 5 kitabınızdan 3-nün rəfdə yerini dəyişmək istəyirsiniz. Bu kitablar rəfdə neçə cür düzülə bilər?

$${}_n P_x = \frac{n!}{(n-x)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{120}{2} = 60$$

Qayda 5. (Kombinezon) n ədədin içindən X ədədin seçilməsində mümkün halların sayı bu cür hesablanır:

$${}_n C_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Məsələn, tutaq ki, kitab rəfində Sizin 5 kitabınız var. Bu kitablardan oxumaq üçün 3-nü təsadüfən seçmək istəyirsiniz. Kitablardan seçilməsində neçə cür mümkün hal kombinasiyası var?

$${}_nC_x = \frac{n!}{x!(n-x)!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 10$$

2. Ehtimal

Tərif: (Klassik tərif) A hadisəsi üçün əlverişli hallar sayının bütün mümkün hallar sayına olan nisbətində A hadisəsinin ehtimalı deyilir və $P(A)$ ilə işarə edilir.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Misal. Bir zər atılır. A hadisəsi 4 – dən böyük xalın düşməsi olsun. Bu hadisənin ehtimalını hesablayın.

$$\begin{cases} \text{bütün hallar} \rightarrow \{1\} \{2\} \{3\} \{4\} \{5\} \{6\} \Rightarrow n = 6 \\ \text{əlverişli hallar} \rightarrow \{5\} \{6\} \rightarrow m = 2 \end{cases}$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Misal. 10 nəfərlik sinifdə 4 əlaçı şagird var. Təsadüfi çağırılan 3 şagirdin əlaçı olması ehtimalını tap.

$$\text{Bütün hallar} \rightarrow {}_{10}C_3$$

$$\text{Əlverişli hallar} \rightarrow {}_4C_3$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

Qeyd 1. A mümkün olmayan hadisə isə

$$P(A) = 0$$

Misal. İki zər atılır. Xalların cəminin 14 olması ehtimalını tapın (mümkün olmayan hadisə)

$$P = 0$$

Qeyd 2. A yəqin hadisə isə

$$P(A) = 1$$

Misal. Bir zər atılır. 7- dən kiçik xal düşməsi hadisəsinin ehtimalını tapın (yəqin hadisə).

$$P = 1$$

Qeyd 3. A təsadüfi hadisə isə

$$0 < P(A) < 1$$

Misal. Bir zər atılır. Cüt xalın düşməsi ehtimalını tapın (təsadüfi hadisə).

$$\begin{cases} \text{bütün halların sayı} \rightarrow n = 6 \\ \text{əlverişli halların sayı} \rightarrow m = 3 \end{cases}$$

$$P = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow P \in (0;1)$$

3. Ehtimalların toplanması

Tərif: A və B hadisələrindən heç olmazsa birinin baş verməsi hadisəsinə A və B hadisələrinin cəmi deyilir və $A \cup B$ kimi işarə olunur.

Qayda 1: İki uyuşmayan hadisənin cəminin ehtimalı, bu hadisələrin ehtimalları cəminə bərabərdir:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Misal. Zər atılır. 2 və ya 5 xalının düşməsi ehtimalını tapın.

$$2 \text{ xalının düşməsi ehtimalı } P(A) = \frac{1}{6}$$

$$5 \text{ xalının düşməsi ehtimalı } P(B) = \frac{1}{6} \text{ olduğundan}$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Misal. Karandaş qutusunda bir-birindən fərqli rəngdə 8 karandaş var. Təsadüfən götürülən karandaşın göy və ya yaşıl olması ehtimalını tapın.

$$\text{göy olması ehtimalı} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{8}$$

$$\text{yaşıl olması ehtimalı} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{8} \text{ olduğundan}$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{Cavab: } \frac{1}{4}$$

Qayda 2: 2 uyuşan A və B hadisələrinin cəminin ehtimalı aşağıdakı düsturla tapılır.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

Misal. Çoxlu hədiyyələri olan lotoreya oyununda Adilin hədiyyə udması ehtimalı $\frac{1}{2}$;

Əlinin hədiyyə udması ehtimalı isə $\frac{1}{5}$ olarsa, onlardan heç olmazsa birinin hədiyyə udması ehtimalını tapın.

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5+2-1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

4. Ehtimalların vurulması

Tərif: A və B hadisələrinin eyni zamanda baş verməsi hadisəsinə A və B hadisələrinin hasili deyilir və $A \cap B$ kimi işarə olunur.

❖ Asılı olmayan A və B hadisələrinin ehtimalı bu hadisələrin ehtimalları hasilinə bərabərdir.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Misal. Bir dəmir pul və zər eyni anda atılır. Pulda xəritə və zərdə cüt xalının düşməsi ehtimalını tapın.

Pulda xəritə üzünün düşməsi $P(A) = \frac{1}{2}$ zərdə cüt xalının düşməsi $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ onda,

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Misal. I qutuda 2 ağ 3 yaşıl, II qutuda 4 göy 2 yaşıl şar var. Hər qutudan 1 şar götürülür. Hər 2- sinin yaşıl olması ehtimalını tapın.

I. qutudan yaşıl çıxması $P(A) = \frac{3}{5}$

II. qutudan yaşıl çıxması $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ onda

$$P(A \cap B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

Tərif: A hadisəsinin baş verməsi şərti ilə B hadisəsinin ehtimalına şərti ehtimal deyilir və $P_A(B)$ ilə işarə edilir.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

Misal. Parkda 10 sarı, 6 ağ taksi var. Taksilər təsadüfi seçilib xidmətə göndərilir. Parkdan əvvəl bir taksi, bir az sonra ikinci taksi çıxdı. Çıxan taksilərin hər ikisinin sarı olması ehtimalını tapın.

Əvvəl sarı taksinin çıxması

$$P(A) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

Sonra parkda 9 sarı, 6 ağ taksı qaldığından II taksinin də sarı çıxması

$$P_A(B) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

olduğundan düstura görə

$$P(A \cap B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{8}$$

Əks hadisələrin ehtimalı

Sınaq nəticəsində $A_1; A_2; \dots; A_n$ hadisələrindən yalnız biri hökmən baş verərsə, onda bu hadisələr tam qrup təşkil edir.

Tərif: İki tam qrup təşkil edən hadisələrə əks hadisələr deyilir.

A hadisəsinin əksi $\bar{A}$ ilə işarə edilir.

Qarşılıqlı əks hadisələrin (tam qrup təşkil edən hadisələrin) ehtimalları cəmi vahidə bərabərdir.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

ƏLAVƏLƏR

Çoxhədlilər

❖ Birhədlilərin cəbri cəminə çoxhədli deyilir.

Məsələn, $3x^2y - 5xy^2 + 2,5xy$ çoxhədlidir. Burada 1- ci həddin əmsalı 3, ikinci həddin əmsalı (-5); üçüncü həddin əmsalı isə 2,5- dir.

Çoxhədlinin (birhədlinin) məxrəcində heç vaxt dəyişən olmur.

$$3x^2y - 5xy^2 + \frac{7}{3x^2} + 6 - \text{çoxhədli deyil}$$

$$2x^2y + 10x^3y^4 + 2x^{-1}y + 5 - \text{çoxhədli deyil}$$

$n \in N$ və $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ olmaqla

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

ifadəsi n – dərəcəli çoxhədli (polinom) adlanır. Burada $a_0x^n; a_1x^{n-1}; \dots; a_{n-1}x_1; a_n$ ifadələri çoxhədlinin hədləri; $a_0; a_1; a_2; \dots; a_{n-1}; a_n$ əmsalları; n - çoxhədlinin dərəcəsi; a_0 - yüksək dərəcəli həddin əmsalı; a_n - sərbəst həddir.

Məsələn, $P(x) = 5x^3 - 4x^2 + 7x - 3$ çoxhədlisi üçün

$5x^3; -4x^2; 7x; -3$ - çoxhədlinin hədləri; $5; -4; 7; -3$ ədədləri çoxhədlinin əmsalları; -3 isə sərbəst həddir. Verilmiş çoxhədli kub dərəcəli çoxhədlidir.

❖ $P(x) = a_n$ ($a_n \neq 0, a_n \in R$) şəklində çoxhədliyə sabit çoxhədli deyilir.

Misal. $P(x) = (3-m)x^3 + 4nx + m + 1$ sabit çoxhədli olarsa, $P(1)$ qiymətini hesablayın.

Həlli

$P(x)$ sabit çoxhədli olduğuna görə

$$\begin{cases} 3-m=0 \\ 4n=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=3 \\ n=0 \end{cases}$$

Onda $P(x) = m+1 = 3+1 = 4$ və dəyişənin ($x \in R$) ixtiyari qiymətində

$$P(x) = 4 \Rightarrow P(1) = 4 \text{ olar}$$

- ❖ $P(x) = 0$ çoxhədlisinə sıfır çoxhədli deyilir. Sıfır çoxhədlinin dərəcəsi bilinməz.
- ❖ Çoxhədlinin əmsalları cəmini tapmaq üçün dəyişənin yerinə 1, sərbəst həddini tapmaq üçün sıfır yazılır.

$P(x)$ çoxhədlisinin cüt qüvvətli hədlərinin əmsalları cəmi

$$\frac{1}{2}[P(1) + P(-1)]$$

düsturu ilə tapılır.

$P(x)$ çoxhədlisinin tək qüvvətli hədlərinin əmsalları cəmi

$$\frac{1}{2}[P(1) - P(-1)] - \text{dir.}$$

Misallar.

- 1) $P(x) = ax^3 - 7x^2 - 4x + 5 - b$ çoxhədlisinin sərbəst həddi 3, əmsalları cəmi (-2) olarsa, $a+b$ cəmini tapın.

$$5 - b = 3 \Rightarrow -b = 3 - 5 \Rightarrow -b = -2 \Rightarrow b = 2$$

$$P(1) = -2 \Rightarrow a - 7 - 4 + 5 - b = -2 \Rightarrow a = 6$$

Onda $a + b = 8$.

- 2) $P(x) = (x^2 + x - 1)^2 - 3x + 2$ çoxhədlisinin əmsalları cəmini, sərbəst həddi, cüt qüvvətli hədlərin və tək qüvvətli hədlərin əmsalları cəmini tapın.

Həlli

$$P(1) = (1^2 + 1 - 1)^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

$$P(0) = (0 + 0 - 1)^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 1 - 0 + 2 = 3$$

$$P(-1) = ((-1)^2 - 1 - 1)^2 - 3 \cdot (-1) + 2 = 1 + 3 + 2 = 6$$

Onda, əmsallar cəmi $P(1) = 0$

sərbəst həddi $P(0) = 3$

$$\text{cüt qüvvətli hədlərin əmsalları cəmi } \frac{1}{2}[P(1) + P(-1)] = \frac{0+6}{2} = 3$$

$$\text{tək qüvvətli hədlərin əmsalları cəmi } \frac{1}{2}[P(1) - P(-1)] = \frac{0-6}{2} = -3$$

❖ İki çoxhədlinin bir- birinə bərabər olması üçün onların eyni dərəcəli hədlərinin əmsalları bərabər olmalıdır.

Misal. $P(x) = 4x^3 - (m-1)x^2 + 8$ və $Q(x) = nx^3 + 5x^2 + k - 1$ çoxhədliləri bərabər olarsa, m,n,k əmsallarını tapın.

Həlli

$$P(x) = Q(x) \Rightarrow \begin{cases} n = 4 \\ -(m-1) = 5 \\ k-1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 4 \\ m = -4 \\ k = 9 \end{cases}$$

❖ Çoxhədlini çoxhədliyə bölmək üçün aşağıdakı üsullardan istifadə edilir.

1. Bucaq bölməsi (klassik üsul)

2. Horner üsulu

3. Qeyri- müəyyən əmsallar üsulu

1) Azalma dərəcəsinə görə yazılmış iki çoxhədlinin bucaq bölməsi üsulu ilə bir- birinə bölünməsi aşağıdakı ardıcılıqla aparılır.

a) Bölünən çoxhədlinin birinci həddi bölən çoxhədlinin birinci həddinə bölünərək qismətdə yazılır.

b) Bölünən çoxhədlidən qismətlə bölənin hasili çıxılır.

c) Bu fərq sıfıra bərabər olarsa bölmə əməli dayandırılır. Əks halda bu əməliyyat yenidən təkrar etdirilərək fərğin dərəcəsi bölənin dərəcəsindən aşağı düşənə qədər davam etdirilir.

$$\begin{array}{r|l} a) & x^3 + 5x^2 - 6x - 6 \\ & x - 2 \\ \hline & x^3 - 2x^2 \\ \hline & 7x^2 - 6x - 6 \\ & - 7x^2 - 14x \\ \hline & 8x - 6 \\ & - 8x - 16 \\ \hline & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} b) & x^5 - 1 \\ & x - 1 \\ \hline & x^5 - x^4 \\ \hline & x^4 - 1 \\ & - x^4 - x^3 \\ \hline & x^3 - 1 \\ & - x^3 - x^2 \\ \hline & x^2 - 1 \\ & - x^2 - x \\ \hline & x - 1 \\ & - x - 1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$x^3 + 5x^2 - 6x - 6 = (x - 2)(x^2 + 7x + 8) + 10$$

2) Çoxhədliləri qeyri- müəyyən əmsallar üsulu ilə bölmək üçün iki çoxhədlinin bərabərlik şərtindən istifadə olunur.

Tutaq ki, $P(x) = x^3 + x + 1$ çoxhədlisini $Q(x) = x^2 + x + 1$ çoxhədlisinə bölmək tələb olunur. $Q(x)$ bölən çoxhədlisinin dərəcəsi 2- dir. Bölünən $P(x)$ - in isə dərəcəsi 3- dür. Ona görə qalıq çoxhədlinin dərəcəsi birdən yüksək ola bilməz.

Ona görə,

$$x^3 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(ax + b) + (px + q)$$

və ya

$$x^3 + x + 1 = ax^3 + (a + b)x^2 + (a + b + p)x + (b + q)$$

İki çoxhədlinin bərabərlik şərtindən istifadə etsək

$$\begin{array}{l|l} x^3 & a = 1 \\ x^2 & a + b = 0 \\ x^1 & a + b + p = 1 \\ x^0 & b + q = 1 \end{array}$$

Buradan $a = 1, b = -1, p = 1, q = 2$ alınır. Beləliklə,

$$x^3 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1) + x + 2.$$

Misal. Tutaq ki, $x^3 + 2x^2 + x + 3$ çoxhədlisini $x^2 + x + 2$ çoxhədlisinə bölmək tələb olunur. Bölən çoxhədli ikidərəcəli olduğu üçün, qalıq çoxhədlinin dərəcəsi birdən yüksək ola bilməz. Ona görə də

$$x^3 + 2x^2 + x + 3 = (x^2 + x + 2)(Ax + B) + Cx + D$$

$$x^3 + 2x^2 + x + 3 = Ax^3 + Bx^2 + Ax^2 + Bx + 2Ax + 2B + Cx + D$$

$$x^3 + 2x^2 + x + 3 = Ax^3 + (A + B)x^2 + (2A + B + C)x + 2B + D$$

iki çoxhədlinin bərabərlik şərtinə görə

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A = 1 \\ x^2 & A + B = 2 \\ x & 2A + B + C = 1 \\ x^0 & 2B + D = 3 \end{array} \Rightarrow A = 1; B = 1; C = -2; D = 1$$

bu qiymətləri ilk tənlikdə yazaq. Onda

$$x^3 + 2x^2 + x + 3 = (x^2 + x + 2)(x + 1) - 2x + 1$$

Bezu teoremi

❖ $P(x)$ çoxhədlisinin $(x - a)$ ikihədlisinə bölünməsindən alınan qalıq $P(x)$ çoxhədlisinin $x = a$ nöqtəsindəki qiymətinə bərabərdir. Bu teorem bölmə əməli aparmadan $P(x)$ çoxhədlisinin $(x - a)$ - ya bölünməsindən alınan qalığı tapmağa imkan verir.

Misal. $P(x) = x^4 - 4x^2 + 3x + 1$ çoxhədlisinin $(x - 2)$ -yə bölünməsindən alınan qalığı tapın. $x - 2 = 0$ tənliyinin kökü olan $x = 2$ -ni çoxhədlidə yerinə yazaq.

$$P(2) = 2^4 - 4 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 7$$

Deməli, qalıq 7- dir.

❖ $P(x)$ çoxhədlisinin $(x - a)$ ikihədlisinə qalıqsız bölünməsi üçün a ədədinin $P(x)$ çoxhədlisinin kökü olması zəruri və kafidir.

❖ Çoxhədlisinin kökünü tapmaq üçün onu sıfıra bərabər edib həll etmək lazımdır.

Misal. $P(x) = x^3 - ax^2 - 6$ çoxhədlisi $(x - 1)$ -ə qalıqsız olaraq bölünürsə, $a = ?$

Həlli

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad P(1) = 0 \Rightarrow 1^3 + a \cdot 1^2 - 6 = 0 \Rightarrow a = 5$$

❖ $P(x)$ çoxhədlisinin $(ax + b)$ -yə bölünməsindən alınan qalıq $P\left(-\frac{b}{a}\right)$ - dır.

Misal. $P(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x + 7$ çoxhədlisinin $(2x - 1)$ -ə bölünməsindən alınan qalığı tapın.

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Onda

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 7 = 8$$

Misal. $P(x) = x^3 - 2x^2 - ax + 6$ çoxhədlisi $(x + 1)$ -ə qalıqsız bölünürsə, onda $P(x)$ - in $(x - 2)$ -yə bölünməsindən alınan qalığı tapın.

Şərtə görə $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ $P(x)$ - in köküdür. Yəni $P(-1) = 0$. Onda

$$(-1)^3 - 2(-1)^2 - a(-1) + 6 = 0 \Rightarrow a = -3$$

Bunu çoxhədlidə yerinə yazaq,

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 6$$

olar. Onda, $P(x)$ - in $(x - 2)$ -yə bölünməsindən alınan qalıq $P(2)$ olur.

$$P(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 6 = 12$$

❖ Əgər çoxhədlinin birinin dərəcəsi n , digərinin dərəcəsi m olarsa, onda hasil $m+n$ dərəcəli çoxhədli olar.

❖ Hər bir cəbri tənliyin heç olmasa bir həqiqi və ya kompleks kökü var. Bu teorem Qausun adı ilə bağlıdır.

❖ Cəbri tənliyin köklərinin sayı onun dərəcəsinə bərabərdir.

❖ n dərəcəli çoxhədlinin ən çoxu n müxtəlif kökü ola bilər.

❖ Tam əmsallı tənlikdə yüksəkdərəcəli həddin əmsalı vahid olduqda həmin tənliyin rəşional kökləri ancaq tam ədədlər olur.

❖ Tam əmsallı tənliyin tam kökləri sərbəst həddin bölənidir.

❖ 3 dərəcəli $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0, a, b, c, d \in R$) tənliyi üçün Viyet teoremi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

❖ n dərəcəli tənliyin kökləri cəmi $-\frac{b}{a}$ -ya, hasilı isə

$$(-1)^n \cdot \frac{\text{sərbəst hədd}}{a}$$

olur.

$$\text{Məs: } 5x^{14} - 4x^{13} + 3x^2 - 10 = 0 \text{ üçün } x_1 + x_2 + \dots + x_{14} = -\frac{-4}{5} = \frac{4}{5}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{14} = (-1)^{10} \cdot \frac{-10}{5} = -2$$

olar.

❖ Əgər x, y, v, z dəyişənlərindən asılı olan çoxhəddlinin bütün hədlərinin dərəcələri eyni olarsa, m olarsa, bu çoxhəddiyə m dərəcəli bircins çoxhədli deyilir.

❖ Əgər çoxhəddidə dəyişənlərin yerini istənilən qaydada dəyişdikdə bu çoxhəddiyə eyniliklə bərabər olan çoxhədli alınarsa bu çoxhəddiyə simmetrik çoxhədli deyilir. Məsələn, $x^2y^3 + x^3y^2$ çoxhəddisində x ilə y -i, y ilə x -i əvəz edək. Onda $y^2x^3 + y^3x^2$ alınar. Deməli, bu çoxhədli simmetrik çoxhəddidir.

Çoxdəyişənli xətti tənliklər sistemi

Bu üsulla sistem tənliklərin həlli dəyişənlərin ardıcıl yox edilməsi prinsipinə əsaslanır. Bu halda verilmiş sistem eynigüclü çevrilmələrlə “üçbucaq” formasına gətirilir.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + y + 2z = 8 \\ 2x + y + z = 5 \end{cases}$$

Sistemin 1-ci tənliyini (-3)-ə vurub, ikinci tənliklə tərəf- tərəfə toplasaq $-2y - z = -4$ və ya $2y + z = 4$ alarıq.

Birinci tənliyi (-2) – yə vurub, üçüncü ilə tərəf- tərəfə toplasaq $-y - z = -3$ və ya $y + z = 3$ alarıq.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2y + z = 4 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

Bu sistemin 2- ci tənliyini $\left(-\frac{1}{2}\right)$ -ə vurub, 3- cü ilə toplasaq, onda

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2y + z = 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

alınar. Buradan isə geriye qayıtmaqla

$$z = 2; y = \frac{4 - z}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1; x = 4 - y - z = 4 - 1 - 2 = 1$$

alırıq. Beləliklə, verilmiş sistemin həlli $(1;1;2)$ - dir.

Misal. α iti bucağı üçün $tg\alpha = \frac{3}{4}$ olarsa, $\sin \alpha, \cos \alpha$ və $ctg\alpha$ - nı tapın.

Həlli

Məlumdur ki, I rübdə axtarılan funksiyalar müsbətdir.

$$tg\alpha = \frac{3}{4}$$

α qarşıdakı katet = 3
 α - ya bitişik katet = 4

Pifaqor teoreminə görə hipotenuzu tapaq

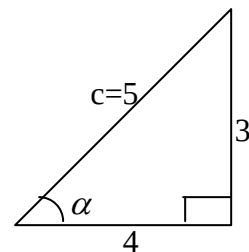
$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

$$c = 5$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{qarşıdakı katet}}{\text{hipotenuz}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$ctg\alpha = \frac{4}{3}$$



• **Trigonometrik funksiyaların I rübdə müqayisəsi:**

$0^\circ < \alpha < 45^\circ$ olarsa

$$\begin{cases} 0 < \sin \alpha < \cos \alpha \\ 0 < tg\alpha < ctg\alpha \end{cases}$$

$45^\circ < \alpha < 90^\circ$ olarsa

$$\begin{cases} 0 < \cos \alpha < \sin \alpha \\ 0 < ctg\alpha < tg\alpha \end{cases}$$

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ olarsa

$$\begin{cases} 0 < \sin \alpha < \operatorname{tg} \alpha \\ 0 < \cos \alpha < \operatorname{ctg} \alpha \end{cases}$$

Trigonometrik funksiyalar I rübə düşməzsə, onda onu əvvəlcə I rübdəki ekvivalenti ilə əvəz etmək lazımdır.

$a = \sin 125^\circ$, $b = \sin 35^\circ$ və $c = \operatorname{tg} 55^\circ$ ədədlərini müqayisə edək.

$$a = \sin 125^\circ = \sin (180^\circ - 55^\circ) = \sin 55^\circ$$

$$b = \sin 35^\circ$$

$$c = \operatorname{tg} 55^\circ$$

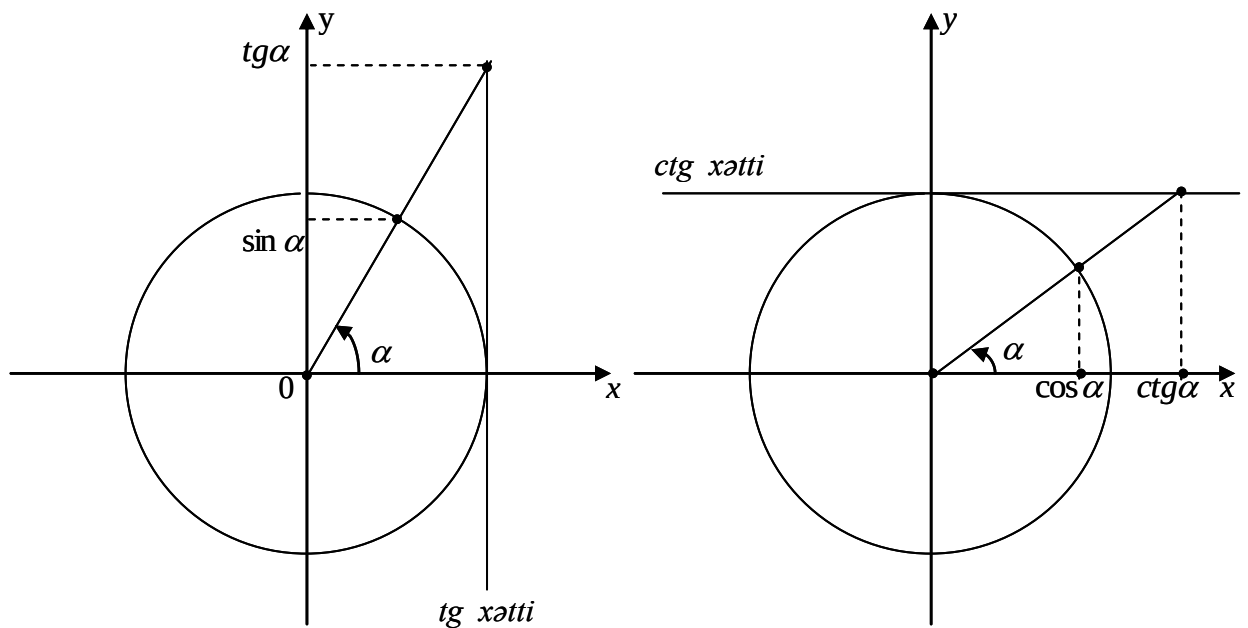
I rübdə $\sin x$ funksiyası artan olduğundan

$$\sin 35^\circ < \sin 55^\circ \Rightarrow b < a$$

$$\sin 55^\circ < \operatorname{tg} 55^\circ \text{ olduğundan}$$

$$b < a < c \text{ alınır.}$$

- **Trigonometrik funksiyalarının qiymətlərinin vahid çevrədə müqayisəsi**



Mündəricat

Ədədi ardıcılıq.....	1
Ədədi silsilə.....	1
Ədədi silsilənin xassələri.....	3
Ədədi silsilənin ilk n həddinin cəmi.....	3
Həndəsi silsilə.....	4
Triqonometriya. Bucağın radian ölçüsü.....	7
Triqonometrik funksiyalar.....	7
Triqonometrik funksiyaların qiymətləri.....	9
Triqonometrik funksiyaların işarələri.....	10
Triqonometrik funksiyaların təkliyi, cütlüyü, dövrülyü.....	10
Əsas triqonometrik düsturlar.....	11
Çevirmə düsturları. Toplama düsturları.....	13
İkiqat bucaq düsturları.....	13
Yarımarqumentin düsturları.....	15
Triqonometrik funksiyaların yarımbucağın tangensi ilə ifadəsi.....	15
Cəmin (fərqi) hasilə çevrilməsi düsturları.....	15
Hasili cəmə çevirən düsturlar.....	16
Üçqat bucağın düsturları.....	16
Köməkçi arqument daxil etməklə çevirmələr.....	17
Tərs triqonometrik funksiyalar.....	17
Tərs triqonometrik eyniliklər.....	20
Triqonometrik tənliklər və onların həll üsulları.....	23
Triqonometrik bərabərsizliklər.....	33
Tərs triqonometrik funksiyalar daxil olan bərabərsizliklərin həlli.....	35
Funksiyalar.....	36
Düz mütənasiblik.Xətti funksiya.....	39
Tərs mütənasiblik.Modul funksiyalar.....	40
$y = \sqrt{x}$ funksiyası.....	42
Funksiyanın işarə sabitliyi intervalları.Arılan və azalan funksiyalar.....	42
Tərs funksiya.Tək və cüt funksiyalar.....	44
Kvadratik funksiya.Kvadrat bərabərsizliklərin həlli.....	46
$y = ax^n$ funksiyası.....	48
Funksiyaların təyin və qiymətlər oblastı.....	48
Dövri funksiyalar.....	53
Funksiya qrafiklərinin həndəsi çevrilməsi.....	55
Triqonometrik funksiyaların dövrünün təyini.....	57
$y = \sin x$ funksiyasının xassələri və qrafiki.....	58
$y = \cos x$ funksiyasının xassələri və qrafiki.....	59
$y = \operatorname{tg} x$ funksiyasının xassələri və qrafiki.....	60
$y = \operatorname{ctg} x$ funksiyasının xassələri və qrafiki.....	60
Nöqtənin ətrafı. Funksiyanın artımı.....	62
Funksiyanın törəməsi. Törəmənin hesablama qaydaları.....	62
Mürəkkəb funksiya və onun törəməsi.....	65
Funksiyanın artması və azalması aralıqları.....	66
Funksiyanın böhran nöqtələri. Funksiyanın maksimum və minimum nöqtələri.....	68
Funksiyanın ən böyük və ən kiçik qiymətləri.....	70
Funksiyanın asimptotları.Funksiyanın tədqiqi.....	72
Funksiyanın qrafikinə toxunanın tənliyi.....	74
Törəmənin həndəsi və fiziki mənası.....	74

Üstlü funksiya.....	77
Ədədin loqarifmi. Loqarifmin xassələri.....	78
Loqarifmləmə. Antiloqarifm (potensiallama).....	79
Loqarifmik funksiya.....	80
Üstlü tənliklər və bərabərsizliklər.....	81
Loqarifmik tənliklər və bərabərsizliklər.....	82
Ardıcılığın limiti.Funksiyanın limiti.....	85
Funksiyaların kəsilməzliyi.....	92
Çoxluqlar.....	94
Birləşmələr nəzəriyyəsi.....	100
Kompleks ədədlər.....	106
Kompleks ədədlər üzərində əməllər.....	108
Kompleks ədədlərin həndəsi təsviri.....	109
Kompleks ədədin modulu və argumenti.....	110
Kompleks ədədin triqonometrik şəkili.	112
Triqonometrik şəkildə verilmiş kompleks ədədlər üzərində əməllər.....	114
İbtidai funksiya. Qeyri- müəyyən inteqral.....	116
Müəyyən inteqral və onun xassələri.....	122
Əyrixətli trapesiyanın sahəsi.....	124
Ehtimal nəzəriyyəsi.....	128
Əlavələr.....	134