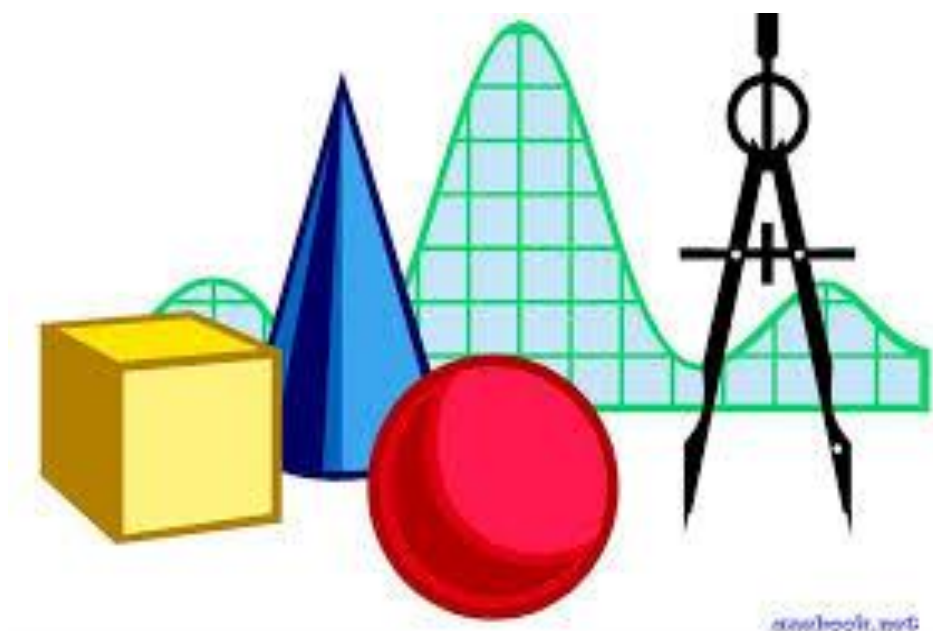


HƏNDƏSƏ



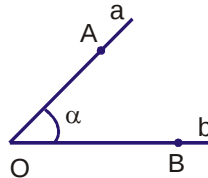
*ABİTURIYENTLƏR ÜÇÜN
DƏRS VƏSAİTİ*

PLANİMETRİYA

Planimetriya-həndəsənin bütün nöqtələri müstəvi üzərində yerləşən fiqurların xassələrini öyrənən bölməsidir.

1. BUCAQLAR. BUCAQLARIN NÖVLƏRİ

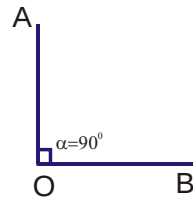
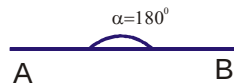
Tərif: Bir nöqtədən çıxan iki şüanın əmələ gətirdiyi fiqura bucaq deyilir. Şəkildə O nöqtəsi bucağın təpəsi, OA və OB şüaları isə bucağın tərəfləridir. Bucaqlar aşağıdakı kimi işarə edilir: $\angle AOB$, $\angle O$, $\angle ab$, α .



Bir-biri üzərinə düşən iki şüadan (OA , OB) birini (OB şüasını) tərpənməz saxlayıb, digərini (OA şüasını) başlanğıc nöqtə (O) ətrafında fırlatsaq, müxtəlif növ bucaqlar alınır. Hər bir bucağın sıfırdan böyük müəyyən dərəcə ölçüsü var.

1. Bucağın tərəfləri bir düz xəttin tamamlayıcı yarım düz xətləri olarsa, ona açıq bucaq deyilir. Açıq bucaq 180° -yə bərabərdir.

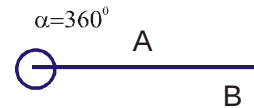
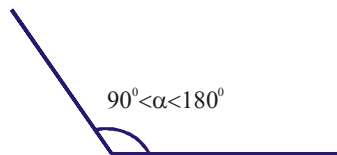
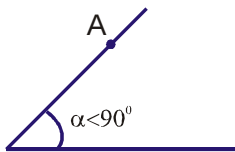
2. 90° -a bərabər olan bucağa düz bucaq deyilir.



3. 90° -dən kiçik olan bucağa iti bucaq deyilir.

4. 90° -dən böyük və 180° -dən kiçik olan bucağa kor bucaq deyilir.

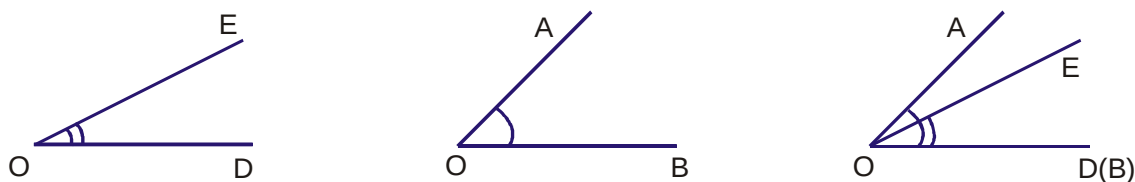
5. 360° -yə bərabər olan bucağa tam bucaq deyilir. OA şüası tam dövr edib OB şüası üzərinə düşdükdə alınan bucaq tam bucaq olur.



Bucaqların müqayisəsi parçaların müqayisəsi kimi aparılır, yəni bucaqlar da bir-birinin üzərinə qoyulmaqla müqayisə olunur.

İki bucaq müqayisə edilərkən onlardan biri digərinin üzərinə elə qoyulur ki, onların təpə nöqtələri və bir tərəfləri üst-üstə düşmüş olsun. Bu zaman bucaqların o biri tərəfləri də üst-üstə düşərsə belə bucaqlara bərabər bucaqlar deyilir. Bir-birinin üzərinə qoyulduqda tamamilə üst-üstə düşdüklərinə görə bütün açıq bucaqlar. Bütün düz və bütün tam bucaqlar öz aralarında bərabərdir.

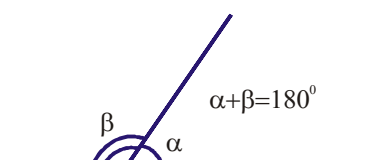
Bir-birinin üzərinə qoyulduqda üst-üstə düşməyən bucaqlar bərabər olmayan bucaqlar adlanır. Şəkildə $\angle EOD$, $\angle AOB$ -nin bir hissəsi olduğundan, $\angle AOB > \angle EOD$ ($\angle EOD < \angle AOB$)



Parçalarda olduğu kimi bucaqları da toplamaq, çıxmaq, natural ədədə vurmaq və bölmək olar.

Qonşu və qarşılıqlı bucaqlar

Tərif: Bir tərəfi ortaq, o biri tərəfləri tamamlayıcı yarım düz xətlər olan bucaqlara qonşu bucaqlar deyildir.

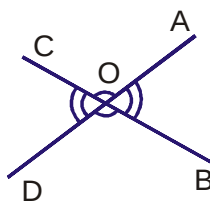


Teorem: Qonşu bucaqların cəmi 180° -dir.

Nəticə:

1. Bərabər bucaqların qonşu bucaqları bərabərdir.
2. Düz bucağın qonşu bucağı düz bucaqdır.
3. İti bucağın qonşu bucağı kor bucaq, kor bucağın qonşu bucağı isə iti bucaqdır.

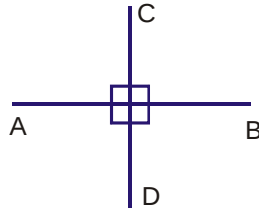
Tərif: Bir bucağın tərəfləri o biri bucağın tərəflərinin tamamlayıcı yarım düz xətləri olarsa, onlara qarşılıqlı bucaqlar deyilir.



Teorem. Qarşılıqlı bucaqlar bərabərdir : $\angle AOB = \angle COD$, $\angle AOC = \angle BOD$.

Perpendikulyar düz xətlər

İki düz xəttin kəsişməsindən dörd bucaq alınır. Bu bucaqlardan biri düz bucaq olarsa, digərləri də düz bucaq olar.



Tərif: Bir-biri ilə düz bucaq altında kəsişən düz xətlərə qarşılıqlı perpendikulyar düz xətlər deyilir.

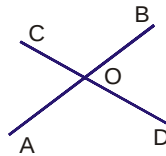
Düz xətlərin perpendikulyarlığı $\perp$ işarəsi ilə göstərilir. Məsələn, $AB \perp CD$.

Teorem. Düz xətt üzərində olmayan nöqtədən həmin düz xəttə bir və yalnız bir perpendikulyar düz xətt çəkmək olar.

Kəsişən və paralel düz xətlər

Kəsişən düz xətlər.

Tərif: Yalnız bir ortaq nöqtəsi olan düz xətlərə kəsişən düz xətlər, həmin ortaq nöqtəyə isə onların kəsişmə nöqtəsi deyilir.



Paralel düz xətlər.

Tərif: Bir müstəvi üzərində yerləşən və kəsişməyən düz xətlərə paralel düz xətlər deyilir.

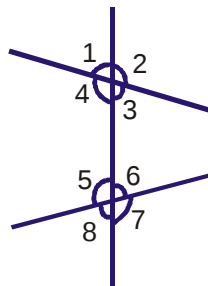
Paralel düz xətlər üzərində yerləşən parçalar paralel parçalar adlanır.



Düz xətlərin və ya parçaların paralelliyi $//$ kimi işarə edilir. Məsələn, $MN // EF$ və $AB // CD$.

İki düz xəttin üçüncü düz xətlə kəsişməsindən alınan bucaqlar

İxtiyarı iki düz xətt üçüncü düz xətlə kəsişdikdə səkkiz bucaq əmələ gəlir. Tutaq ki, a və b düz xətləri c düz xətti ilə kəsişir. Bu zaman alınan bucaqları 1, 2, 3, ..., 8 rəqəmləri ilə işarə edək. Onda



$\left. \begin{matrix} 3;5 \\ 4;6 \end{matrix} \right\}$	daxili çarpaz bucaqlar
$\left. \begin{matrix} 1;7 \\ 2;8 \end{matrix} \right\}$	xarici çarpaz bucaqlar
$\left. \begin{matrix} 3;6 \\ 4;5 \end{matrix} \right\}$	daxili birtərəfli bucaqlar,
$\left. \begin{matrix} 2;7 \\ 1;8 \end{matrix} \right\}$	xarici birtərəfli bucaqlar,
$\left. \begin{matrix} 4;8 \\ 2;6 \\ 3;7 \\ 1;5 \end{matrix} \right\}$	uyğun bucaqlar.

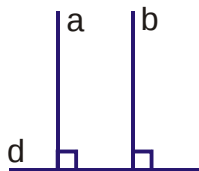
İki düz xəttin paralellik əlaməti

Teorem. İki düz xətt üçüncü düz xətlə kəsişdikdə:

1. Çarpaz bucaqlar bərabərdirsə;
2. Uyğun bucaqlar bərabərdirsə;
3. Birtərəfli bucaqların cəmi 180° -dirsə, düz xətlər paraleldir.

Nəticə: Eyni bir düz xəttə perpendikulyar olan düz xətlər paraleldir.

Başqa sözlə, $a \perp d, b \perp d$ isə $a \parallel b$.



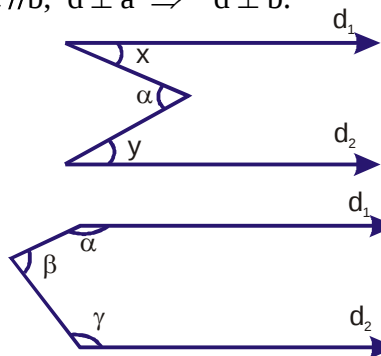
Tərs teorem. İki paralel düz xətt üçüncü düz xətlə kəsişdikdə:

1. Çarpaz bucaqlar bərabərdir.
2. Uyğun bucaqlar bərabərdir.
3. Birtərəfli bucaqların cəmi 180° -dirsə, düz xətlər paraleldir.

Nəticə: Düz xətt iki paralel düz xətdən birinə perpendikulyardırsa, onda digər düz xəttə də perpendikulyardır. Başqa sözlə, $a \parallel b, d \perp a \Rightarrow d \perp b$.

Bucaqlarla bağlı əlavə xassələr:

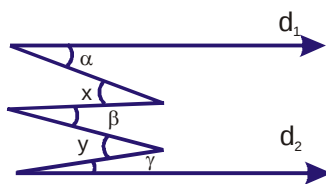
1. $d_1 \parallel d_2$
 $\alpha = x + y$



2. $d_1 \parallel d_2$
 $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$

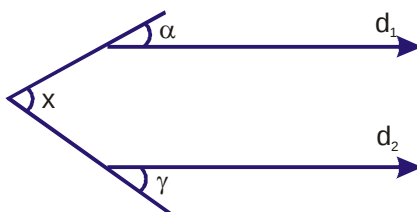
3. $d_1 // d_2$

$$x + y = \alpha + \beta + \gamma$$



4. $d_1 // d_2$

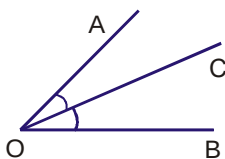
$$x = \alpha + \gamma$$



Bucağın tən böləni

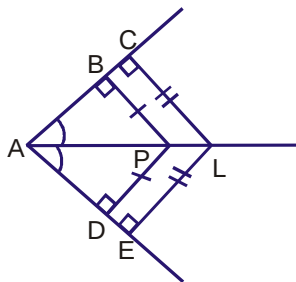
Tərif: Bucağın təpə nöqtəsindən çıxıb onun tərəfləri arasından keçən və onu bərabər hissələrə bölən şüaya bucağın tən böləni deyilir.

Şəkildə OC şüası $\angle AOB$ -ni iki bərabər bucağa böldüyündən ($\angle AOC = \angle COB$), OC şüası $\angle AOB$ -nin tən bölənidir.



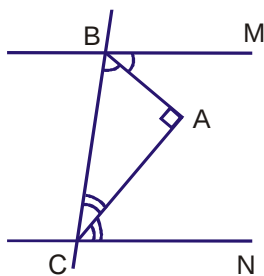
Əlavə xassələr

1. Tən bölən üzərindəki hər bir nöqtə bucağın tərəflərindən eyni məsafədədir.



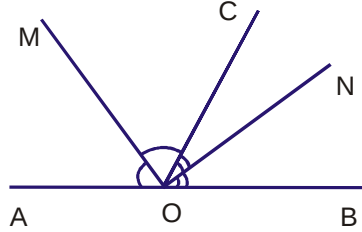
$$PB = PD, LC = LE$$

2. İki paralel düz xətt digər düz xətlə kəsişdikdə alınan birtərəfli bucaqların tən bölənləri bir-birinə perpendikulyardır.



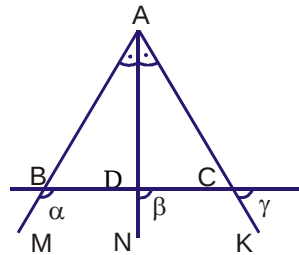
Başqa sözlə, BA şüası $\angle CBM$ -in, CA şüası $\angle BCN$ -in tən böləni olarsa, onda $BA \perp CA$ olar.

3. Qonşu bucaqların tən bölənləri bir-birinə perpendikulyardır.

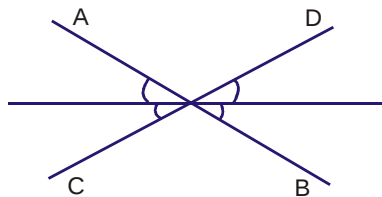


Başqa sözlə, OM şüası $\angle AOC$ -nin, ON şüası $\angle BOC$ -nin tən bölənidirsə, onda $OM \perp ON$.

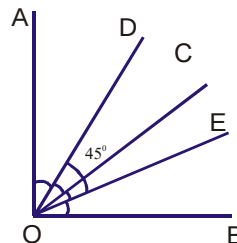
4. AD şüası $\angle BAC$ -nin tən böləni olarsa və BC xətti AM, AN və AK şüaları ilə şəkildə göstərildiyi kimi α, β və γ bucaqları əmələ gətirərsə, onda $\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$.



5. Qarşılıqlı bucaqların tən bölənləri bir düz xətt üzərindədir.



6. Tamamlayıcı bucaqların tən bölənləri bir-biri ilə 45° -li bucaq əmələ gətirir.



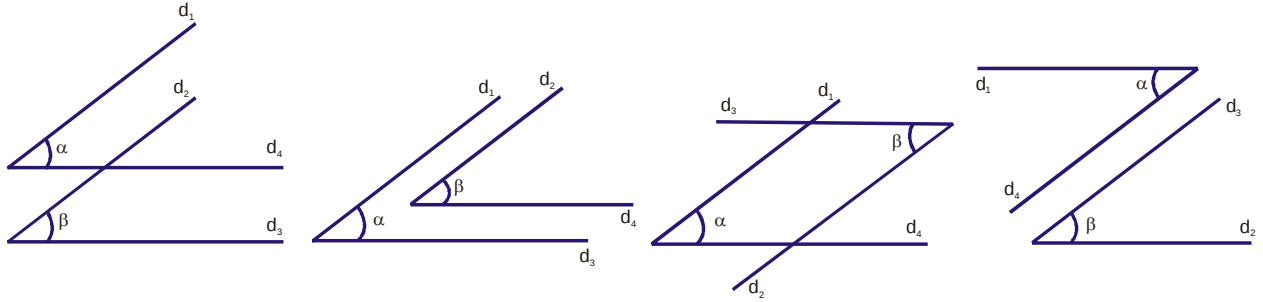
Başqa sözlə, $\angle AOB = 90^\circ$, OD şüası $\angle AOC$ -nin tən böləni, OE isə $\angle BOC$ -nin tən bölənidirsə, $\angle DOE = 45^\circ$.

Uyğun tərəfləri paralel və ya perpendikulyar olan bucaqlar

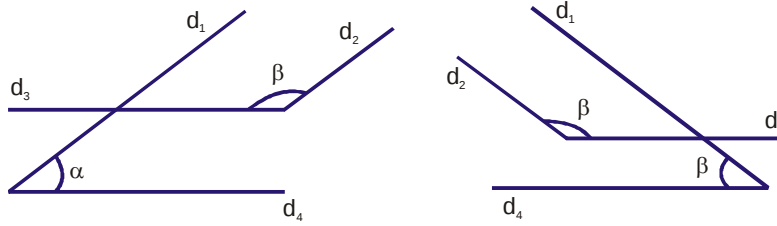
Tərif: Hər ikisi iti və ya hər ikisi kor olan bucaqlara eyni adlı bucaqlar deyilir.

Teorem. Uyğun tərəfləri paralel olan bucaqlar eyni adlı olduqda bərabər, müxtəlifadlı olduqda isə onların cəmi 180° -a bərabərdir.

Başqa sözlə, $d_1 \parallel d_2$, $d_3 \parallel d_4$ olarsa, $\alpha = \beta$ və ya $\alpha + \beta = 180^\circ$ olar.

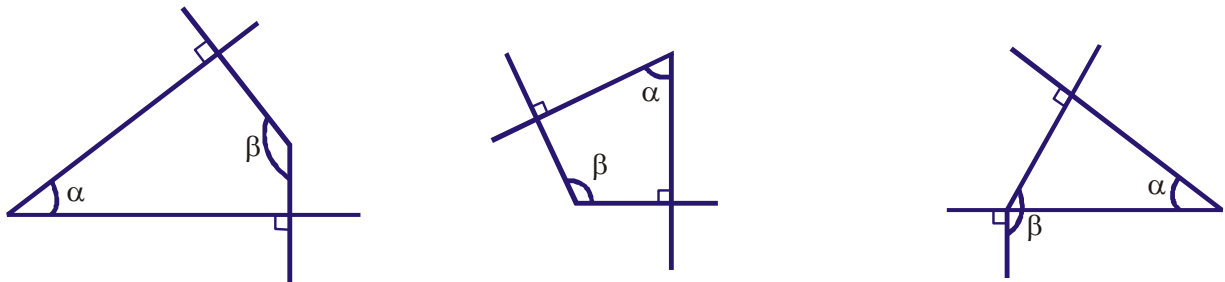


$$\alpha = \beta$$

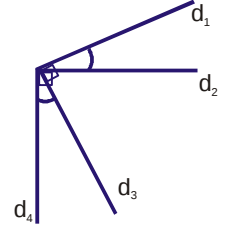
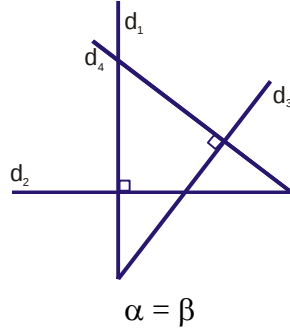
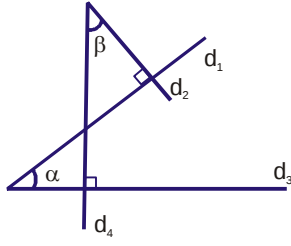


$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Teorem: Uyğun tərəfləri perpendikulyar olan bucaqlar eyni adlı olduqda bərabər, müxtəlif adlı olduqda isə onların cəmi 180° -dir. Başqa sözlə, $d_1 \perp d_2$, $d_3 \perp d_4$ isə $\alpha + \beta = 180^\circ$ və ya $\alpha = \beta$ olar.



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



İZAHLI SUALLAR

1. Uyğun tərəfləri perpendikulyar olan bucaqlardan biri digərinin 10 mislindən 40° kiçikdir. Böyük bucağı tapın.

- A) 100° B) 120° C) 140° D) 160° E) 170°

Həlli: Uyğun tərəfləri perpendikulyar olan bucaqlar haqqında teoremə görə; bu bucaqlar eyni adlı olduqda onlar bir-birinə bərabər, müxtəlif adlı olduqda isə onların cəmi 180° -a bərabər olur. Məsələnin şərtinə görə bucaqlar müxtəlif adlıdır, yəni onların cəmi 180° -yə bərabərdir. Birinci bucağa x desək, şərtə əsasən digər bucaq $10x - 40^\circ$ olar. Onda $x + 10x - 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow 11x = 180^\circ + 40^\circ \Rightarrow 11x = 220^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$.

Onda $10x - 40^\circ = 10 \cdot 20^\circ - 40^\circ = 160^\circ$.

Cavab:

D

2. 120° -li bucaqla qonşu olan bucağın qarşılıqlı bucağını tapın.

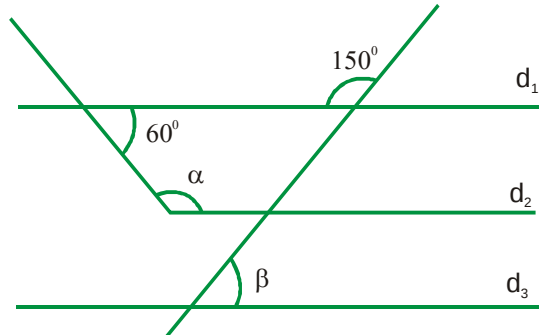
- A) 50° B) 60° C) 80° D) 100° E) 120°

Həlli: Qonşu bucaqların cəmi 180° olduğundan 120° -li bucağın qonşu bucağı 60° -dir.

Digər tərəfdən qarşılıqlı bucaqlar bərabər olduğuna görə 60° -li bucağın qarşılıqlı bucağı da 60° -dir.

Cavab: B

3. $d_1 // d_2 // d_3$ olduğuna görə şəkilə əsasən α və β bucaqları arasındakı münasibəti tapın.



- A) $\alpha = \beta$ B) $\beta = 2\alpha$ C) $\alpha = 2\beta$ D) $\alpha = 90^\circ - \beta$ E) $\alpha = 90^\circ + \beta$

Həlli: $d_1 // d_2$ olduğuna görə α bucağı və 60° -lı bucaq daxili birtərəfli bucaqlardır.

Onda: $\alpha + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 120^\circ$.

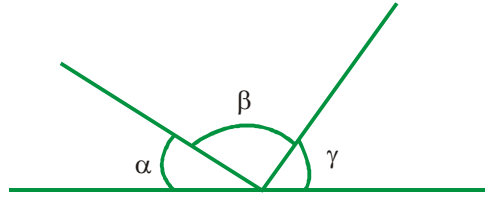
Digər tərəfdən $d_1 // d_3$ olduğuna görə β bucağı ilə 150° -nin qarşılıqlı bucağı daxili birtərəfli bucaqlardır. Deməli, $150^\circ + \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

Beləliklə, $\alpha = 90^\circ + \beta$.

Cavab: E

4. Şəklə görə $\frac{\alpha}{1} = \frac{\beta}{5} = \frac{\gamma}{3}$ isə $\beta = ?$

- A) 80° B) 90° C) 100° D) 110°
E) 150°



Həlli: Şəkildən göründüyü kimi $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ olmalıdır. $\frac{\alpha}{1} = \frac{\beta}{5} = \frac{\gamma}{3} = k$ olsun, onda $\alpha = k$, $\beta = 5k$, $\gamma = 3k$ olar. Bunları bərabərlikdə nəzərə alsaq, $k + 5k + 3k = 180^\circ \Rightarrow 9k = 180^\circ \Rightarrow k = 20^\circ$ və $\beta = 5k = 100^\circ$ olar.

Cavab: C

5. $\alpha = 52^\circ 18' 10''$ isə $\alpha/5 = ?$

- A) $10^\circ 48' 27''$ B) $10^\circ 27' 38''$ C) $10^\circ 28' 40''$ D) $10^\circ 26' 53''$ E) $10^\circ 26' 40''$

Həlli: α bucağının dərəcə və dəqiqəsini göstərən hissələri 5-ə tam bölünmədiyi üçün onu aşağıdakı kimi çevirək:

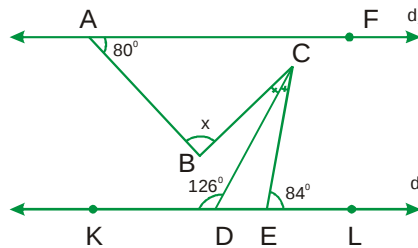
$$52^\circ 18' 10'' = 50^\circ 138' 10'' = 50^\circ 130' 490''.$$

İndi isə bütün hissələri 5-ə bölsək, $50^\circ : 5 = 10^\circ$; $130' : 5 = 26'$; $490'' : 5 = 98''$ alarıq.

Onda $\frac{\alpha}{5} = 10^\circ 26' 98'' = 10^\circ 27' 38''$.

Cavab: B

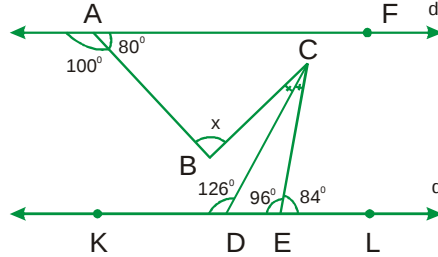
6. Şəkildə, $d_1 // d_2$, $\angle FAB = 80^\circ$, $\angle BCD = \angle DCE$, $\angle CDK = 126^\circ$, $\angle CEL = 84^\circ$ isə $\angle ABC = x$ neçə dərəcədir?



- A) 56 B) 60 C) 70 D) 76 E) 86

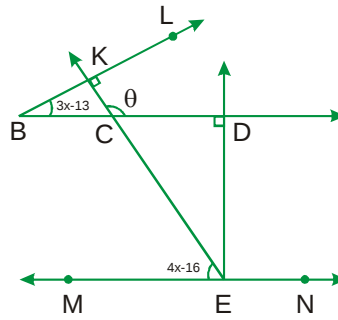
Həlli:

Şəkildən göründüyü kimi $126^\circ = \angle DCE + 96^\circ$. Buradan $\angle DCE = 126 - 96 = 30^\circ$. Onda $\angle BCE = 60^\circ$ olur. $d_1 // d_2$ düz xətləri arasında bir tərəfə yönələn bucaqların cəmi digər tərəfə yönələn bucaqların cəminə bərabərdir: $100^\circ + 60^\circ = x + 84^\circ$, $x = 76^\circ$



Cavab:D

7. Şəkildə, $ED \perp BD$, $EK \perp BL$, $BD \parallel MN$,
 $\angle LBD = 3x - 13^\circ$, $\angle KEM = 4x - 16^\circ$ isə $\angle KCD = \theta$ neçə dərəcədir?



- A) 151 B) 146 C) 138 D) 134 E) 128

Həlli:

Şəkildə $\angle LBD = \angle KED$ (uyğun tərəfləri perpendikulyar olan eyni adlı bucaqlar)
 Onda $3x - 13 = 90^\circ - (4x - 16^\circ)$, $x = 17^\circ$. Digər tərəfdən $\theta = 90^\circ + 3x - 13^\circ = 77^\circ + 3 \cdot 17^\circ = 128^\circ$.

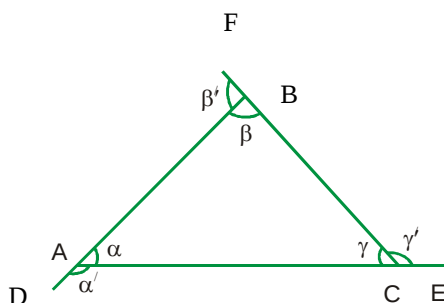
Cavab:E

2. ÜÇBUCAQLAR

Tərif. Bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtəni birləşdirən düz xətt parçalarının əmələ gətirdiyi fiqura üçbucaq deyilir. Üçbucaq onun tərəflərində qoyulmuş üç hərflə oxunur. A, B, C nöqtələri üçbucağın təpə nöqtələri AB, BC, AC üçbucağın tərəfləridir. “Üçbucaq” sözü Δ işarəsi ilə göstərilir, məsələn, ΔABC . Üçbucağın tərəfləri qarşıdakı təpə nöqtələrinə uyğun olaraq kiçik hərflə də işarə edilir, məsələn, a, b, c. $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle ACB$ üçbucağın daxili bucaqları olub, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ və ya α , β , γ kimi də işarə edilir.

Üçbucağın hər hansı tərəfini uzatsaq, onun daxili bucağı ilə qonşu olan bucaq alırıq ki, bu bucağa üçbucağın xarici bucağı deyilir.

$\angle CAD$, $\angle ABF$, $\angle BCE$ üçbucağın xarici bucaqları olub α' , β' , γ' kimi işarə edilir



Bucaqların xassələri

- $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
- $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ$
- $\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' = 180^\circ$
- $\alpha' = \beta + \gamma$; $\beta' = \alpha + \gamma$; $\gamma' = \alpha + \beta$
- $\alpha' + \beta' - \gamma' = 2\gamma$; $\beta' + \gamma' - \alpha' = 2\alpha$; $\alpha' + \gamma' - \beta' = 2\beta$
- $|\beta' - \gamma'| < \alpha' < \beta' + \gamma'$; $|\alpha' - \gamma'| < \beta' < \alpha' + \gamma'$; $|\alpha' - \beta'| < \gamma' < \alpha' + \beta'$.

Üçbucaqda bucaq və tərəf münasibətləri

1. Üçbucaqda böyük bucaq qarşısında böyük tərəf, kiçik bucaq qarşısında kiçik tərəf, bərabər bucaqlar qarşısında isə bərabər tərəflər durur:

$$\angle A > \angle B > \angle C \Leftrightarrow a > b > c$$

$$\angle B = \angle C \Leftrightarrow a = b$$

2. (Üçbucaq bərabərsizliyi). Üçbucağın hər bir tərəfi digər iki tərəfin fərqiindən böyük cəmindən kiçikdir.

$$|b - c| < a < b + c$$

$$|a - c| < b < a + c$$

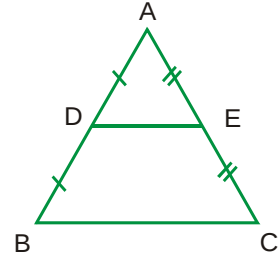
$$|a - b| < c < a + b$$

Burada $\angle C < 90^\circ \Leftrightarrow |a - b| < c < \sqrt{a^2 + b^2}$

$\angle C = 90^\circ \Leftrightarrow |a - b| < c = \sqrt{a^2 + b^2}$

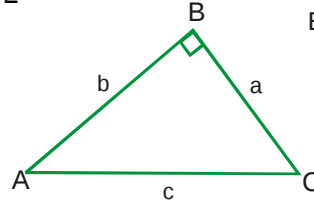
$\angle C > 90^\circ \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} < c < a + b$

3. Üçbucağın iki tərəfinin ortasını birləşdirən düz xətt parçası üçbucağın üçüncü tərəfinə paralel olub həmin tərəfin yarısına bərabərdir. Başqa sözlə, D və E – uyğun olaraq AB və AC tərəflərinin orta nöqtələri isə $DE \parallel BC$ və $DE = \frac{1}{2} BC$

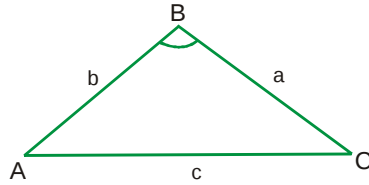


4. ABC üçbucağında

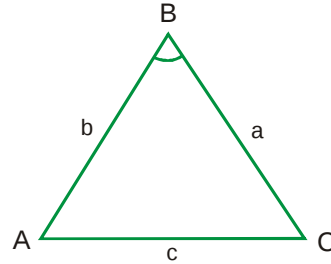
$$\angle C = 90^\circ \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$



$$\angle C > 90^\circ \Rightarrow c^2 > a^2 + b^2$$

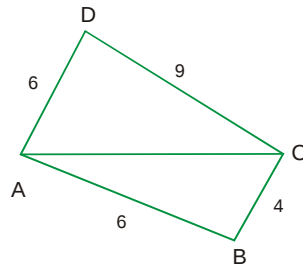


$$\angle C < 90^\circ \Rightarrow c^2 < a^2 + b^2$$



NÜMUNƏLƏR:

1. Şəkildə verilənlərə görə AC-nin ala biləcəyi qiymətləri sayını tapın.



A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

E) 8

Həlli:

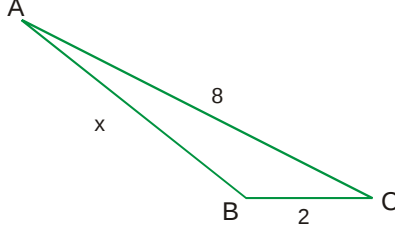
Üçbucaq bərabərsizliyinə əsasən

$$\begin{cases} 3 < AC < 15 \\ 2 < AC < 10 \end{cases} \Rightarrow 3 < AC < 10$$

3 ilə 10 arasında 6 dənə tam qiymət vardır.

Cavab: C

2. Şəkilləki üçbucaqda B bucağı kor bucaqdırsa, $AB = x$ uzunluğu hansı qiyməti ala bilər?



- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

Həlli:

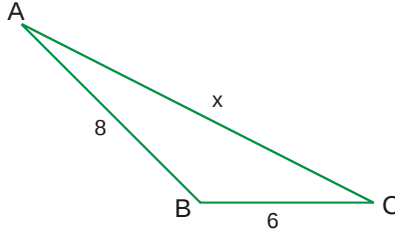
Üçbucaq bərabərsizliyinə görə $8-2 < x < 8+2 \Rightarrow 6 < x < 10$

AC tərəfi kor bucaq qarşısında olduğundan, ən böyükdür. Ona görə $x < 8$. Beləliklə

$$\begin{cases} 6 < x < 10 \\ x < 8 \end{cases} \Rightarrow 6 < x < 8$$

Cavab: C

3. Şəkilləki üçbucaqda $\angle B > 90^\circ$ olarsa, $AC = x$ -in uzunluğu aşağıdakılardan hansı ola bilər?



- A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 14

Həlli:

Üçbucaq bərabərsizliyinə görə və AC tərəfi kor bucaq qarşısında durduğu üçün

$$\begin{cases} 8-6 < x < 8+6 \\ 8 < x \\ x^2 > 8^2 + 6^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 < x < 14 \\ x > 8 \\ x > 10 \end{cases} \Rightarrow 10 < x < 14$$

Cavab: D

4. Aşağıdakılardan hansı tərəfləri a, b, c olan üçbucaq ola bilər?

- A) $a+5$ B) $a=6$ C) $a=7$ D) $a=4$ E) $a=2$

$$b=3$$

$$c=2$$

$$b=4$$

$$c=1$$

$$b=7$$

$$c=2$$

$$b=7$$

$$c=2$$

$$b=2$$

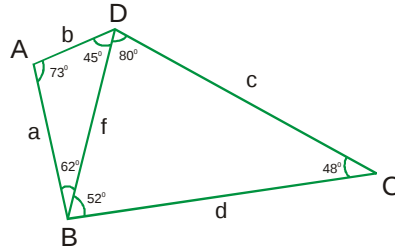
$$c=5$$

Həlli:

Üçbucaqda bir tərəfin uzunluğu digər iki tərəfin uzunluqları cəmindən kiçik, fərqinin modulundan böyük olduğu üçün $a=7$, $b=7$, $c=2$ ola bilər.

Cavab: C

5. Şəkildə $AB=a$ sm, $AD=b$ sm, $DC=c$ sm, $BD=f$ sm, $BC=d$ sm, $\angle ABD=62^\circ$, $\angle ADB = 45^\circ$, $\angle CBD=52^\circ$, $\angle BDC=80^\circ$ olarsa, aşağıdakı ifadələrdən hansı doğrudur?



A) $d > c > f > b > a$

B) $d > c > f > a > b$

C) $c > d > f > b > a$

D) $f > d > c > b > a$

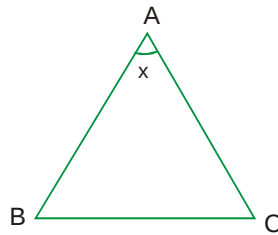
E) $f > c > d > b > a$

Həlli:

$\triangle ABD$ –də, $45^\circ < 62^\circ < 73^\circ \Rightarrow a < b < f$ (1) Digər tərəfdən $\triangle BDC$ –də $48^\circ < 52^\circ < 80^\circ \Rightarrow f < c < d$ (2). Onda (1) və (2) –dən $a < b < f < c < d$

Cavab: A

6. Şəkildə $AB = AC$, $44^\circ < B < 66^\circ$ olarsa, x aşağıdakı aralıqlardan hansında yerləşir?



A) $44^\circ < x < 92^\circ$

B) $48^\circ < x < 92^\circ$

C) $48^\circ < x < 60^\circ$

D) $42^\circ < x < 80^\circ$

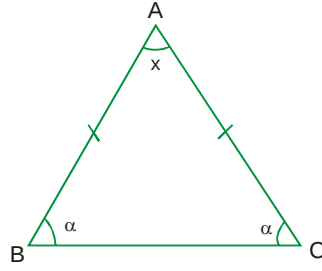
E) $46^\circ < x < 92^\circ$

Həlli:

$\angle B = \angle C = \alpha$. Şərtə əsasən $44^\circ < \alpha < 66^\circ$. Onda $88^\circ < 2\alpha < 132^\circ$ (1).

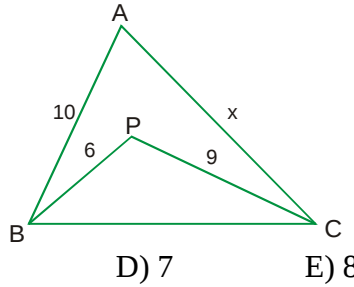
$\triangle ABC$ –də $x + 2\alpha = 180^\circ$ olduğundan, $2\alpha = 180^\circ - x$ (2)

(1) və (2) –dən $88^\circ < 180^\circ - x < 132^\circ \Rightarrow -92^\circ < -x < -48^\circ \Rightarrow 48^\circ < x < 92^\circ$



Cavab: B

7. Şəkildə $AB = 10$ sm, $PB = 6$ sm, $PC = 9$ sm, $AC = x$ olarsa, x –in ala biləcəyi ən kiçik tam qiyməti tapın.



A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

E) 8

Həlli:

P nöqtəsi $\triangle ABC$ –nin daxilində bir nöqtə olduğundan, $6+9 < 10 + x \Rightarrow 15 < 10 + x \Rightarrow x > 5$

Onda x -in ən kiçik tam qiyməti $x=6$ -dır.

Cavab: C

ÜÇBUCAQDA GÖRKƏMLİ NÖQTƏLƏR

Üçbucaqda medianların, tərəflərin orta perpendikulyarlarının, hündürlüklər ilə üst-üstə düşən düz xətlərin kəsişmə nöqtələri və s. üçbucağın görkəmli (mühüm nöqtələri adlanır).

Aşağıdakı münasibətlərdə $\triangle ABC$ -də a, b, c –tərəflər, p yarımpərimetr, R – xaricə çəkilmiş çevrənin radiusu, r – daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu, G – medianların, H – hündürlüklərin, I – tənbolənlərin kəsişmə nöqtəsi (daxilə çəkilmiş çevrə mərkəzi) O – tərəflərin orta perpendikulyarlarının kəsişmə nöqtəsi (xaricə çəkilmiş çevrə mərkəzi) qəbul edilmişdir.

Görkəmli nöqtələr arasında məsafə

Üçbucağın xaricə və daxilinə çəkilmiş çevrə mərkəzləri arasındakı məsafə düsturu:

$$OI = \sqrt{R^2 - 2Rr} \quad (\text{Eylər teoremi})$$

Nəticə :

1. $R^2 - 2Rr \geq 0 \Rightarrow R^2 \geq 2Rr \Rightarrow R \geq 2r$ olar, yəni xaricə çəkilmiş çevrənin diametrindən kiçik deyil.

2. $\triangle ABC$ bərabərtərəfli olarsa, $R = 2r$ və deməli $OI = R(R - 2r) = 0$ olur, yəni bərabərtərəfli üçbucağın xaricə və daxilinə çəkilmiş çevrələrin mərkəzləri üst-üstə düşür.

3. Xaricə çəkilmiş çevrə mərkəzi ilə ağırlıq mərkəzi arasındakı məsafə düsturu:

$$OG = \frac{1}{3} \sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$$

4. Ağırliq mərkəzi ilə ortomərkəz arasındakı məsafə düsturu:

$$GH = \frac{2}{3} \sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$$

5. Xaricə çəkilmiş çevrə mərkəzi ilə ortomərkəz arasındakı məsafə düsturu:

$$IG = \frac{1}{3} \sqrt{9R^2 - 3p^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

6. Üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrə mərkəzi ilə ortomərkəz arasındakı məsafə düsturu:

$$IH = \sqrt{4R^2 + 2r^2 - 0,5(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Üçbucağın təpə nöqtələri ilə görkəmli nöqtələri arasında məsafə

1. Üçbucağın təpə nöqtələri ağırliq mərkəzinə qədər olan məsafə düsturları:

$$AG = \frac{1}{3} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}; \quad BG = \frac{1}{3} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}; \quad CG = \frac{1}{3} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2};$$

2. Üçbucağın təpə nöqtələrindən onun daxilinə çəkilmiş çevrə mərkəzinə qədər olan məsafə düsturları:

$$AI = \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}; \quad BI = \sqrt{\frac{ac(p-b)}{p}}; \quad CI = \sqrt{\frac{ac(p-c)}{p}};$$

3. Üçbucağın təpə nöqtələrindən onun xaricinə çəkilmiş çevrə mərkəzinə qədər olan məsafə:

$$AO = BO = CO = R$$

4. Üçbucağın təpə nöqtələrindən ortomərkəzə qədər olan məsafə düsturları:

$$AH = \sqrt{4R^2 - a^2} = 2R \cos \alpha = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$

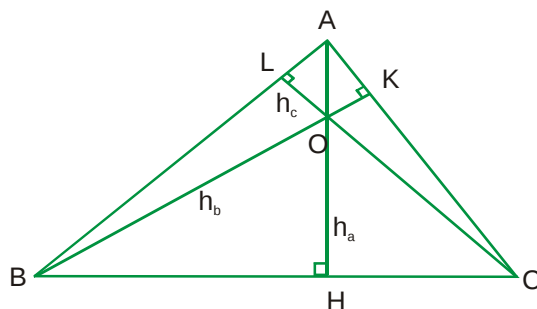
$$BH = \sqrt{4R^2 - b^2} = 2R \cos \beta = b \cdot \operatorname{ctg} \beta$$

$$CH = \sqrt{4R^2 - c^2} = 2R \cos \gamma = c \cdot \operatorname{ctg} \gamma$$

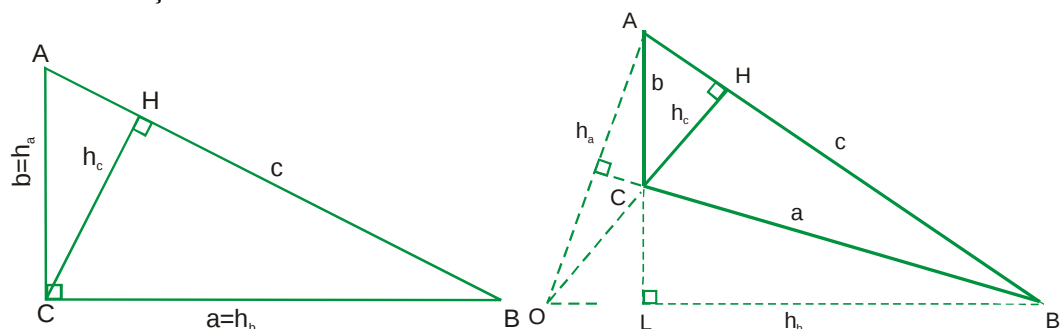
ÜÇBUCAQDA GÖRKƏMLİ XƏTLƏR

Hündürlük

Üçbucağın təpəsindən onun qarşısındakı tərəfə çəkilmiş perpendikulyar parçaya üçbucağın hündürlüyü deyilir. $AH = h_a$, $BK = h_b$, $CL = h_c$.



Üçbucağın hündürlükləri bir nöqtədə kəsişirlər. Bu nöqtə ortomərkəz adlanır. Kəsişmə nöqtəsi üçbucaq iti bucaqlıdırsa onun daxilinə, düzbucaqlıdırsa düz bucaq təpəsinə, kor bucaqlıdırsa xaricinə düşür.



Tərəfləri a, b, c yarımpərimetrləri $p = \frac{a+b+c}{2}$ olan $\triangle ABC$ -nin hündürlükləri aşağıdakı kimi hesablanır:

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

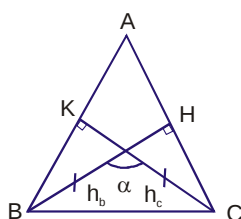
$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

Əlavə xassələr

1. $\triangle ABC$ –də daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu r olarsa, onda:

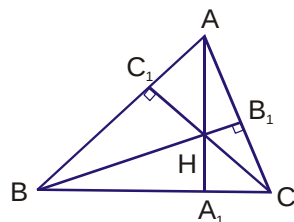
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

2. $\triangle ABC$ -də $BH = h_b$ və $CK = h_c$ isə, onda $\alpha = 180^\circ - \angle A$



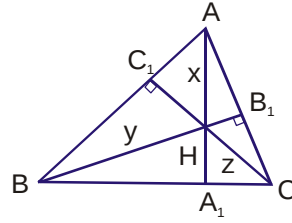
3. $\triangle ABC$ -də $AA_1 = h_a$, $BB_1 = h_b$, $CC_1 = h_c$, H orta mərkəz olarsa, onda:

$$AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot HC_1$$

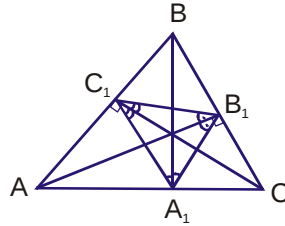


4. Üçbucağın tərəflərinin kvadrları cəmi hər bir hündürlük ilə bu hündürlüyün təpədən orta mərkəzə qədər olan məsafələrin hasili cəminin iki mislinə bərabərdir
 $a^2 + b^2 + c^2 = 2(xh_a + yh_b + zh_c)$

Burada $AH = x$, $BH = y$, $CH = z$ –dir.



5. Üçbucağın hündürlükləri onların oturacaqlarının əmələ gətirdiyi üçbucağın daxili bucaq tənbönləridir

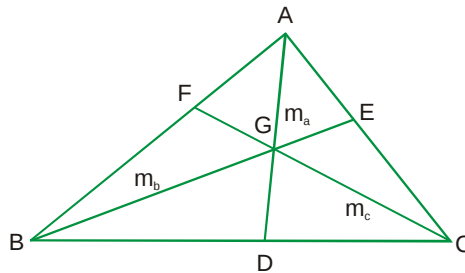


6. Üçbucaqda böyük tərəfə kiçik hündürlük, kiçik tərəfə isə böyük hündürlük uyğundur. Başqa sözlə $\triangle ABC$ –də $a > b > c \Leftrightarrow h_a < h_b < h_c$

Median

7. Üçbucağın hər hansı təpəsini qarşısındakı tərəfin ortası ilə birləşdirən düz xətt parçasına median deyilir.

$$AD = m_a, BE = m_b, CF = m_c.$$



8. Üçbucağın medianları bir nöqtədə kəsişirlər. Bu nöqtə üçbucağın ağırlıq mərkəzi adlanır. Ağırlıq mərkəzi üçbucaq daxilində yerləşir.

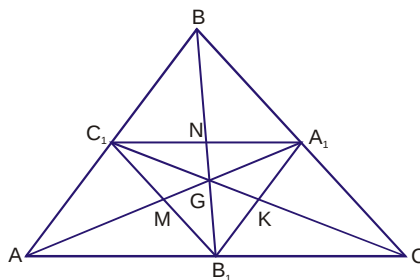
9. Üçbucağın medianı kəsişmə nöqtəsində təpədən başlayaraq 2:1 nisbətində hissələrə bölünür.

10. ΔABC -də AA_1 , BB_1 , CC_1 medianlar, G ağırlıq mərkəzi olarsa, onda:

$$AG = \frac{2}{3} m_a, \quad GA_1 = \frac{1}{3} m_a$$

$$BG = \frac{2}{3} m_b, \quad GB_1 = \frac{1}{3} m_b$$

$$CG = \frac{2}{3} m_c, \quad GC_1 = \frac{1}{3} m_c$$

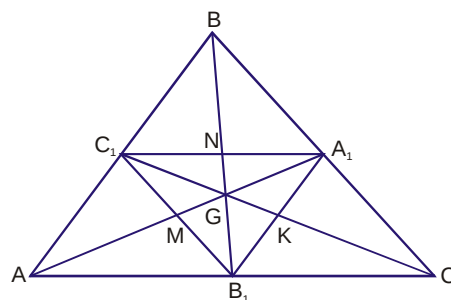


11. Medianın orta nöqtəsi ilə üçbucağın ağırlıq mərkəzi arasındakı məsafə bu medianın $\frac{1}{6}$ hissəsinə bərabərdir. Başqa sözlə

$$\Delta ABC\text{-də } AM = MA_1 \text{ olarsa, } MG = \frac{1}{6} m_a$$

$$BN = NB_1 \text{ olarsa, } NG = \frac{1}{6} m_b$$

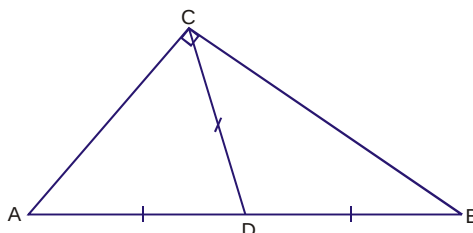
$$CK = KC_1 \text{ olarsa, } KG = \frac{1}{6} m_c$$



12. ΔABC -də $\angle C = 90^\circ$ isə $m_c = \frac{c}{2}$

$$\angle C > 90^\circ \text{ isə } m_c < \frac{c}{2}$$

$$\angle C < 90^\circ \text{ isə } m_c > \frac{c}{2}$$



13. ΔABC -də m_a , m_b , m_c medianları üçün aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur:

$$1. m_a < p; m_b < p; m_c < p$$

$$2. p < m_a + m_b + m_c < 2p$$

$$3. \frac{a+b-c}{2} < m_c < \frac{a+b}{2}$$

$$\text{Burada } p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

14. ABC üçbucağının medianları arasında aşağıdakı şəkildə bərabərsizlik münasibətləri vardır.

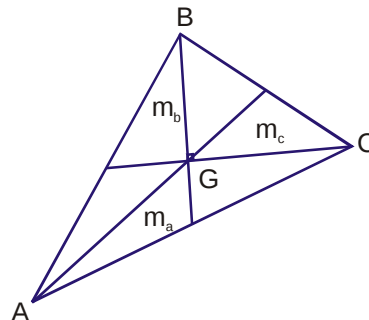
$$|m_b - m_c| < m_a < m_b + m_c$$

$$|m_a - m_c| < m_b < m_a + m_c$$

$$|m_a - m_b| < m_c < m_a + m_b$$

15. ABC üçbucağında medianlar perpendikulyardırsa ($m_b \perp m_c$), onda aşağıdakı bərabərliklər doğrudur :

1. $m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$
2. $b^2 + c^2 = 5a^2$
3. $a = \frac{2}{3} m_a$



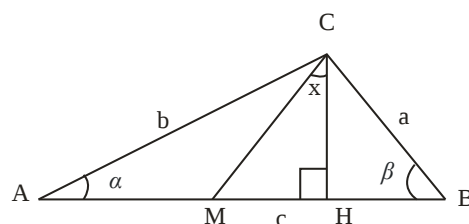
16. ΔABC -də $a > b > c \Leftrightarrow m_a < m_b < m_c$

17. ΔABC -də $\angle C = 90^\circ$ olarsa, $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$

18. ΔABC -də CH hündürlük, CM median olarsa: 1. $x = |\alpha - \beta|$

$$2. HM = \frac{|a^2 - b^2|}{2c}$$

Burada $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $\angle HCM=x$ -dir.



19. Medianı hesablamaq üçün aşağıdakı düsturlar vardır:

$$m_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha} = R \sqrt{2(\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) - \sin^2 \alpha}$$

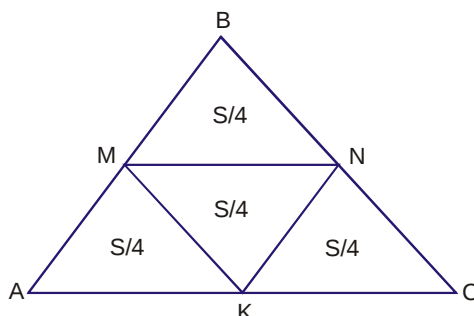
Burada a, b, c üçbucağın tərəfləri, α, β, γ – bucaqları, R = xaricə çəkilmiş çevrənin radiusudur.

20. ABC üçbucağının medianları ilə tərəfləri arasındakı münasibət aşağıdakı kimidir:

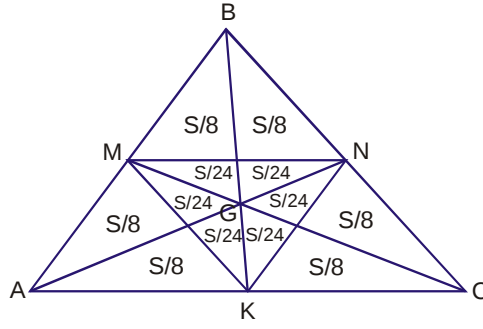
$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Bu asılılıq Leybnis – Yakobi düsturu adlanır

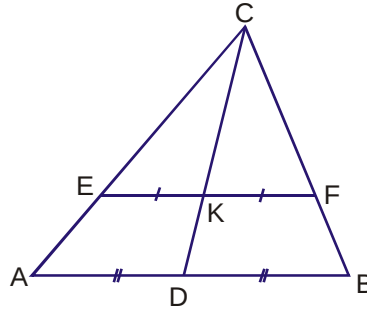
21. Üçbucağın orta xətləri onun sahəsini dörd bərabər hissəyə bölür :



22. Üçbucağın medianları və orta xətləri onun sahəsini aşağıdakı kimi hissələrə bölür:



23. Üçbucağın medianı qarşı tərəfə paralel olan bütün düz xətt parçalarını yarıya bölür. Başqa sözlə $\triangle ABC$ -də BD median, $EF \parallel AB$, $CD \cap EF = K$ olarsa, $EK=KF$.

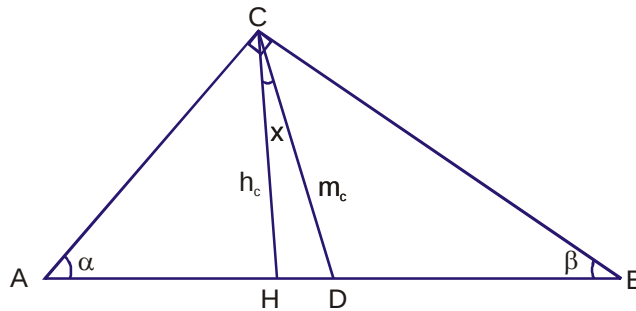


24. İxtiyari üçbucaqda böyük tərəfə kiçik median, kiçik tərəfə böyük median uyğundur. Yəni $a > b > c \Leftrightarrow m_a < m_b < m_c$.
 25. İki medianı bərabər olan üçbucaq bərabəryanlı bütün medianları bərabər olan üçbucaq bərabərtərəflidir:

$$m_a = m_b \Leftrightarrow a = b$$

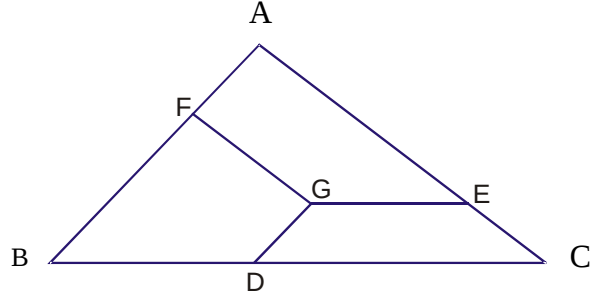
$$m_a = m_b = m_c \Leftrightarrow a = b = c$$

26. Düzbucaqlı üçbucaqda düz bucaq tərəfindən endirilmiş median və hündürlük arasındakı bucaq iti bucaqlar fərqlinin mütləq qiymətinə bərabərdir.



Başqa sözlə $\angle C = 90^\circ$, $CH = h_c$, $CD = m_c$, $\angle HCD = x$ olarsa, $x = |\alpha - \beta|$ olur.

27. Üçbucağın ağırlıq mərkəzindən yan tərəflərə paralel olaraq çəkilmiş parçaların uzunluqlarının cəmi, üçbucağın perimetrinin $1/3$ hissəsinə bərabərdir.



Başqa sözlə $\triangle ABC$ -də $GE \parallel BC$, $GD \parallel AB$, $GF \parallel AC$ olarsa, $GF+GD+GE = \frac{1}{3}P$. Burada $P=AB+BC+AC$.

28. $\triangle ABC$ -nin medianları G nöqtəsində kəsişirsə, onda:
 $AB^2+BC^2+CA^2=3(GA^2+GB^2+GC^2)$

29. M nöqtəsi üçbucaq müstəvisi üzərində olan ixtiyari nöqtə, G – medianların kəsişmə nöqtəsi olarsa, onda:

$$AG^2+BG^2+CG^2=AM^2+BM^2+CM^2-3MG^2$$

Bu Laqranj – Leybnis teoremidir.

30. $\triangle ABC$ -nin m_a, m_b, m_c medianları üçün aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur:

$$1) \frac{3}{4}P < m_a + m_b + m_c < P, \quad P = a + b + c$$

$$2) 9r \leq m_a + m_b + m_c \leq \frac{9}{2}R$$

$$3) 1b-c < m_a < \frac{b+c}{2}$$

Burada r və R uyğun olaraq 2 daxilə və xaricə çəkilmiş çevrələrin radiusudur.

31. $\triangle ABC$ -də m_a, m_b, m_c medianlarına görə a, b, c tərəfləri aşağıdakı kimi tapılır:

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2}; \quad b = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_a^2 + m_c^2) - m_b^2};$$

$$c = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_a^2 + m_b^2) - m_c^2}$$

Tərəfləri a, b, c olan $\triangle ABC$ -nin medianları aşağıdakı kimi hesablanır:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2};$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2};$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2};$$

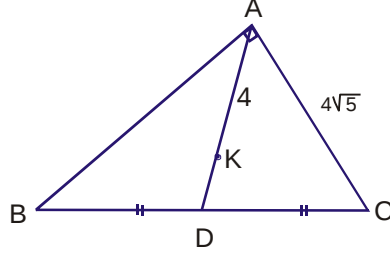
Üçbucağın sahəsi onun hər hansı medianı ilə iki bərabər hissəyə bölünür.

Üçbucağın bütün medianları çəkilərsə, onun sahəsi altı bərabər hissəyə bölünür.

NÜMUNƏLƏR:

1. $\triangle ABC$ –də $\angle A = 90^\circ$,

$AK = 4$ sm, $AC = 4\sqrt{5}$ sm. K ağırlıq mərkəzidir. AB – ni tapın.



- A) $8\sqrt{5}$ B) 12 C) $8\sqrt{3}$ D) $8\sqrt{2}$ E) 8

Həlli:

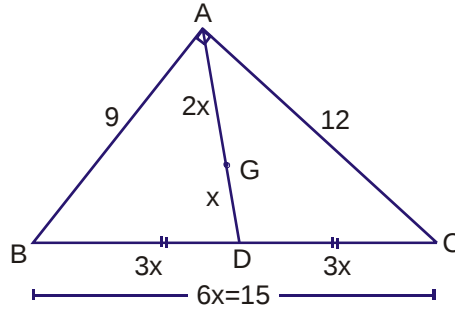
K ağırlıq mərkəzin olduğu üçün AD mediandır $KD = \frac{4}{2} = 2$ sm, $AD = 4 + 2 = 6$ sm,

$\triangle ABC$ – düzbucaqlı üçbucaq olduğundan $AD = DC = BD = 6$ sm-dir. $BC = 12$ sm. Pifaqor teoreminə görə $AB^2 = 12^2 - (4\sqrt{5})^2 = 64$ sm², $AB = 8$ sm

Cavab: E

2. $\triangle ABC$ –də $\angle A = 90^\circ$, $BD = DC$, $AB = 9$ sm, $AC = 12$ sm, $GD = ?$

- A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 4 E) 4,5



Həlli:

$\triangle ABC$ –dən Pifaqor teoreminə görə $BC = 15$ sm tapılır.

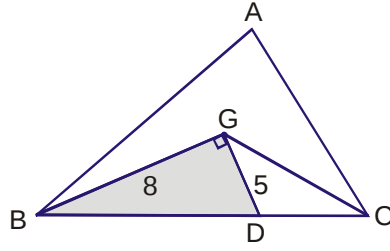
$$AD = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ sm}, \quad GD = \frac{7,5}{3} = 2,5 \text{ sm}$$

Cavab: B

3. G nöqtəsi $\triangle ABC$ –nin ağırlıq mərkəzidir. $GB \perp GD$, $BG = 8$ sm. $GD = 5$ sm, $= 4DC$ –dir. $S_{ABC} = ?$

$3BD$

- A) 105 B) 100 C) 96 D) 75 E) 72



Həlli:

$3BD = 4DC$ olduğu üçün $BD = 4x$, $DC = 3x$ olar.

$$S_{BDG} = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20 \text{ sm}^2$$

$$\frac{S_{BDG}}{S_{DCG}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{20}{S_{DCG}} = \frac{4}{3}$$

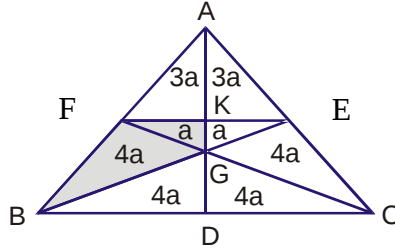
$$S_{DCG} = 15 \text{ sm}^2, S_{BCG} = 20 + 15 = 35 \text{ sm}^2$$

$$S_{ABC} = 3 S_{BCG} = 3 \cdot 35 = 105 \text{ sm}^2$$

$$S_{ABC} = 105 \text{ sm}^2$$

Cavab: A

4. $\triangle ABC$ –də $BD = DC$, $AE = EC$, $FE \parallel BC$ və $S_{FBGK} = 15 \text{ sm}^2$, $S_{ABC} = ?$
A) 45 B) 56 C) 60 D) 72 E) 80



Həlli:

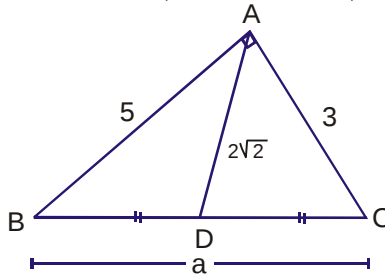
Şəkildən göründüyü kimi

$$\frac{S_{FBGK}}{S_{ABC}} = \frac{5a}{24a}, \frac{15}{S_{ABC}} = \frac{5}{24} \text{ olur. Buradan } S_{ABC} = 72 \text{ sm}^2$$

Cavab: D

5. $\triangle ABC$ –də $BD = DC$, $AB = 5 \text{ sm}$, $AC = 3 \text{ sm}$, $AD = 2\sqrt{2} \text{ sm}$ isə $\triangle ABC$ –ni perimetri neçə olar?

- A) 16 B) 14 C) 13 D) 12 E) 10



Həlli:

$$2m_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$

$$2 \cdot (2\sqrt{2})^2 = 5^2 + 3^2 - \frac{a^2}{2}$$

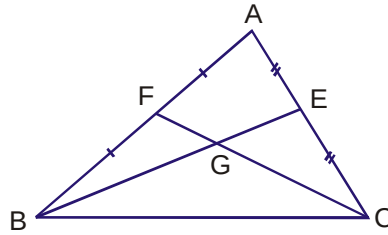
$$a = 6 \text{ sm}$$

$$P_{ABC} = a + b + c = 6 + 3 + 5 = 14 \text{ sm}$$

Cavab: B

6. $\angle A = 90^\circ$, $AF = FB$, $AE = EC$, $BE = 8 \text{ sm}$, $CF = 6 \text{ sm}$ isə $BC = ?$

- A) $5\sqrt{5}$ B) 6 C) 4 D) 5 E) $4\sqrt{5}$



Həlli:

$m_b = 8 \text{ sm}$, $m_c = 6 \text{ sm}$ və $\angle A = 90^\circ$ olduğundan, $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$

$$5m_a^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow 5m_a^2 = 64 + 36 = 100$$

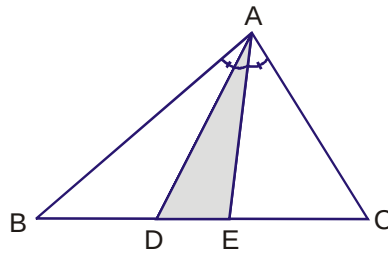
$$5m_a^2 = 100, m_a^2 = 20, m_a = 2\sqrt{5}$$

$$a = 2m_a = 2 \cdot 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

Cavab: E

7. $\triangle ABC$ –də AD median, AE tənböləndir. $AB = 12$, $AC = 6 \text{ sm}$ -dir. S_{ADE} ən çoxu neçə sm ola bilər?

- A) 6 B) 8 C) 12 D) 15 E) 18



Həlli:

Tənbölənin xassəsinə görə $BE = 12x$, $EC = 6x$ olar. $BC = 12x + 6x = 18x$. AD median olduğu üçün, $BD = DC = 9x$, $DE = 9x - 6x = 3x$ olur.

S_{ADE} –nin ən böyük olması üçün $\angle A = 90^\circ$ olmalıdır. Buradan

$$S_{ABC} = \frac{12 \cdot 6}{2} = 36 \text{ sm}^2$$

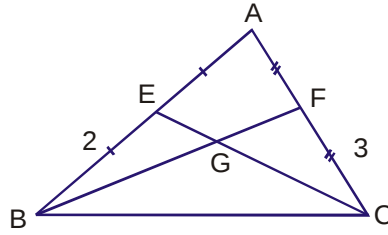
$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{3x}{18x} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{36} = \frac{1}{6}$$

$$S_{ADE} = 6\text{sm}^2 \text{ olur.}$$

Cavab: A

8. $\triangle ABC$ –də E və F yan tərəflərin orta nöqtələridir. $BE = 2\text{sm}$, $FC = 3\text{sm}$, $CE = 6\text{sm}$ isə $BC = ?$

- A) 12 B) $\sqrt{21}$ C) $2\sqrt{11}$ D) $3\sqrt{21}$ E) 10



Həlli:

Medianın hesablanması düsturuna əsasən

$$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$$

$$a^2 + 36 = 2 \cdot 36 + \frac{16}{2}$$

$$a^2 = 72 + 8 - 36 = 44$$

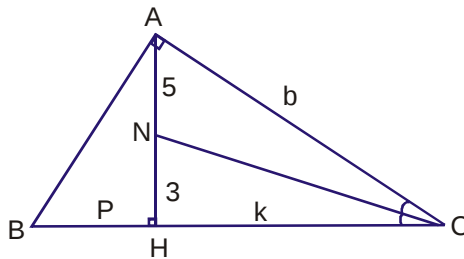
$$a = 2\sqrt{11}$$

Cavab: C

9. $\triangle ABC$ –də $\angle A = 90^\circ$

$AH \perp BC$, CN – tənbölən, $AN = 5\text{sm}$, $NH = 3\text{sm}$, $BH = ?$

- A) $\frac{32}{3}$ B) $\frac{33}{2}$ C) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ D) $9\sqrt{6}$ E) 6



Həlli:

$\triangle AHC$ –dən $b^2 - k^2 = 8^2 = 64$ (1) və $\frac{b}{k} = \frac{5}{3}$ olur. $b = \frac{5}{3}k$ ifadəsini (1) –də nəzərə alsaq,

$$\left(\frac{5}{3}k\right)^2 - k^2 = 64 \text{ burada isə } k^2 = \frac{64 \cdot 9}{16} \Rightarrow k = 6 \text{ alınar. } AH^2 = P \cdot k \text{ olduğu üçün, } 64 = P \cdot 6 \Rightarrow$$

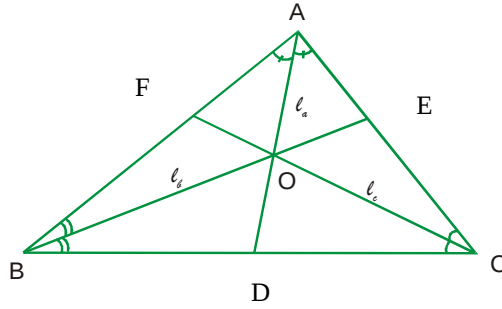
$$\Rightarrow P = \frac{64}{6} = \frac{32}{3} . \text{ Deməli, } BH = \frac{32}{3} \text{ sm olar.}$$

Cavab: A

Tənbölən

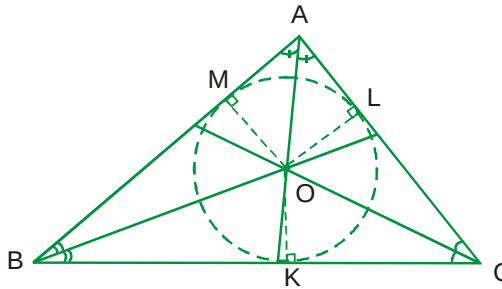
32. Üçbucağın bucaq tənböləninə tərədən qarşıdakı tərəfə qədər olan parçasına üçbucağın tənböləni deyilir.

$$AD = l_a, BE = l_b, CF = l_c.$$

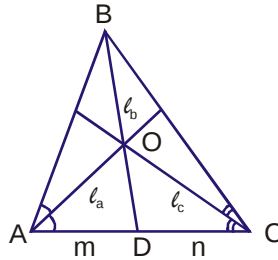


33. Üçbucağın daxili bucaqlarının tənbölənləri bir nöqtədə kəsişir. Bu nöqtə daxilə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir.

$$OK = OM = OL = r$$



$\triangle ABC$ -də $BD = l_b$, BD -nin qarşı tərəfi böldüyü hissələrin uzunluğu $AD = m$, $DC = n$ olarsa, onda aşağıdakı münasibətlər doğrudur:



$$\frac{c}{a} = \frac{m}{n}; m = \frac{bc}{a+c}; n = \frac{ab}{a+c}; l_b^2 = ac - mn$$

Tərəfləri a, b, c , yarımpərimetri p olan $\triangle ABC$ -nin tənbölənləri aşağıdakı kimi hesablanır:

$$l_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}; l_b = \frac{2}{a+c} \sqrt{acp(p-b)}; l_c = \frac{2}{a+b} \sqrt{abp(p-c)};$$

34. Üçbucağın medianlarının və daxili bucaq, tənbönlərinin kəsişmə nöqtəsi üçbucağın daxilində yerləşir.

35. İxtiyari üçbucağın hündürlüyü, tənböləni və medianı arasındakı asılılıq aşağıdakı kimidir:

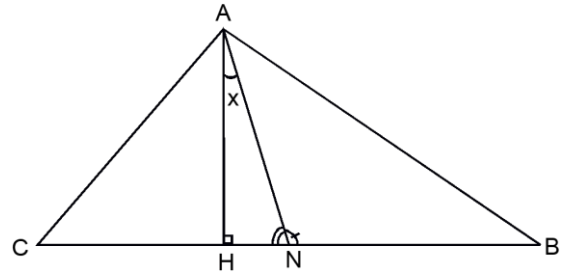
$$h_a < l_a < m_a, h_b < l_b < m_b, h_c < l_c < m_c$$

36. $\triangle ABC$ –də $AH \perp BC$ və AN , $\angle BAC$ -nin tənböləni isə, onda:

$$1) \angle NAH = \frac{1}{2} (\angle B - \angle C)$$

$$2) \angle ANH = 90^\circ - \frac{1}{2} (\angle B - \angle C)$$

$$3) \angle ANC = 90^\circ + \frac{1}{2} (\angle B - \angle C)$$

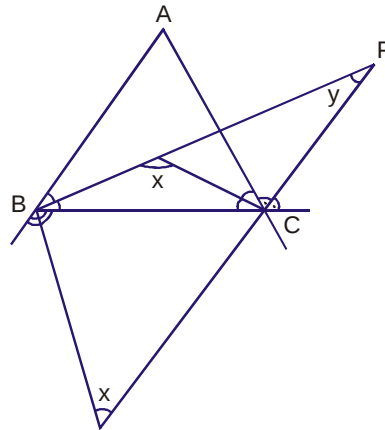


37. $\triangle ABC$ -də BK , CK – daxili bucaqların tənbönləri, BM , CM və CP xarici bucaqların tənbönləri isə, onda:

$$1) x = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$$

$$2) y = \frac{\angle A}{2}$$

$$3) z = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$$



38. $\triangle ABC$ -nin l_a daxili bucaq tənbölənini hesablamaq üçün aşağıdakı düsturlar var:

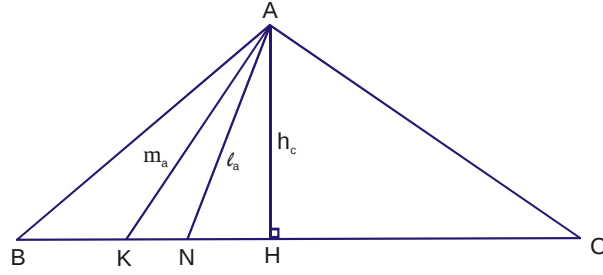
$$l_a = \frac{2ab \cos \frac{d}{2}}{a+b} = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}} = \frac{c \sin \beta}{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{b \sin \beta}{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{2R \sin \beta \sin \gamma}{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}}$$

39. $\triangle ABC$ -nin AN tənböləni ilə AK medianının N və K oturacaqları arasındakı məsafə:

$$1. NK = \frac{a|b-c|}{2(b+c)}$$

AN tənböləni ilə AH hündürlüyünün oturacaqları arasındakı məsafə:

$$2. HN = \frac{|b-c|}{2} \left(\frac{b+c}{a} - \frac{a}{b+c} \right) = \frac{2p(p-a)|b-c|}{a(b+c)}$$



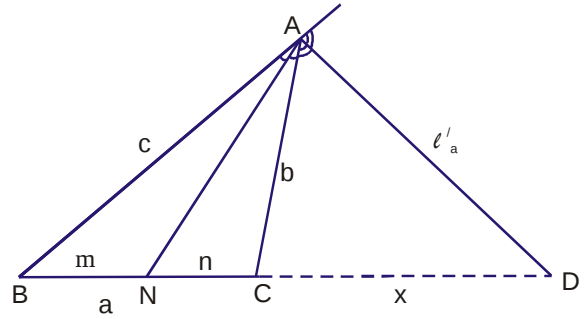
40. Üçbucağın xarici bucağının tən bölməni qarşısındakı tərəfin uzantısını eyni bir nöqtədə kəsir ki, bu nöqtə ilə həmin tərəfin ucları arasındakı parçalar üçbucağın qalan iki tərəfi ilə mütənasibdir.

Başqa sözlə desək, $\triangle ABC$ -də

$AN = \ell_a$, $CD = x$ olarsa, onda:

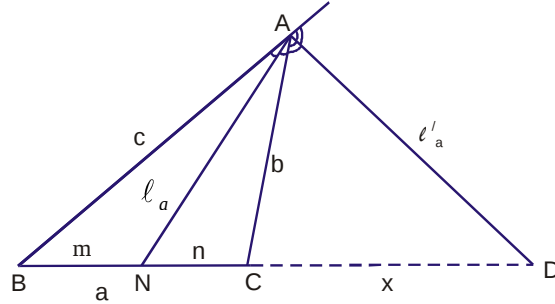
$$1) \frac{c}{b} = \frac{a+x}{x}$$

$$2) (\ell'_a)^2 = (a+x)x - bc \ell_a$$



41. $\triangle ABC$ -də $AN = \ell_a$, $AD = \ell'_a$, $BN = m$, $NC = n$ $CD = x$ olarsa, onda:

$$\frac{x}{n} = \frac{x+m+n}{m}$$



42. $\triangle ABC$ -nin ℓ'_a xarici bucaq tən bölməni hesablamq üçün aşağıdakı düsturlar var:

$$\ell'_a = \frac{2}{|b-c|} \sqrt{ac(p-b)(p-c)} = \frac{2bc \sin \frac{a}{2}}{|b-c|} = \frac{c \sin \beta}{\sin \frac{|\beta-\gamma|}{2}} = \frac{2R \sin \beta \sin \gamma}{\sin \frac{|\beta-\gamma|}{2}}$$

43. $\triangle ABC$ -nin uyğun daxili və xarici bucaq tən bölmələrinin nisbəti üçün aşağıdakı münasibətlər var:

$$\frac{\ell_a}{\ell'_a} = \frac{|b-c|}{b+c} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}; \quad \frac{\ell_b}{\ell'_b} = \frac{|a-c|}{a+c} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2};$$

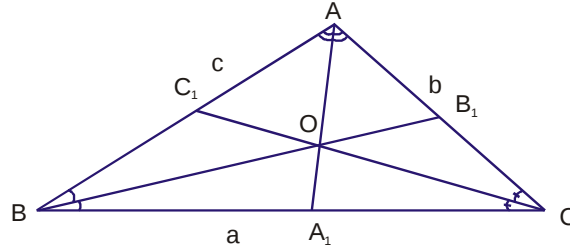
$$\frac{\ell_c}{\ell'_c} = \frac{|a-b|}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$$

44. $\triangle ABC$ –nin daxilinə çəkilmiş çevrənin O mərkəzi, AA_1 , BB_1 , CC_1 tən bölmələrini aşağıda göstərilən nisbətə bölür:

$$1. \frac{AO}{OA_1} = \frac{b+c}{a}, \frac{BO}{OB_1} = \frac{a+c}{b}, \frac{CO}{OC_1} = \frac{a+b}{c}$$

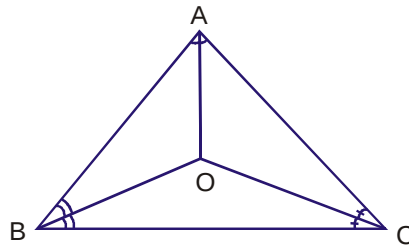
və

$$2. \frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1} = 1 \text{ olur.}$$

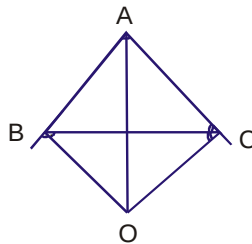


45. Daxilə çəkilmiş çevrə mərkəzini (tən bölmələrin kəsişmə nöqtəsi) üçbucağın təpə nöqtələri ilə birləşdirdikdə alınan üçbucaqların sahələri verilmiş üçbucağın tərəfləri ilə mütənasibdir.

$$\frac{S_{\triangle BOC}}{a} = \frac{S_{\triangle AOC}}{b} = \frac{S_{\triangle AOB}}{c}$$

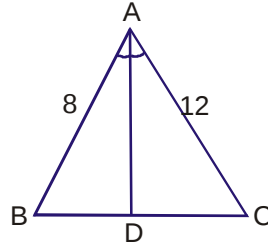


46. Üçbucağın daxili bucaq tən bölmələrinin uzantısı ilə digər xarici bucaq tən bölmələri bir nöqtədə kəsişirlər. Başqa sözlə A daxili bucaq tən bölməsi ilə B və C xarici bucaq tən bölmələri eyni O nöqtəsində kəsişirlər.



1. AD – tən bölmə, $AB = 8$ sm, $AC = 12$ sm, $BC = 10$ sm isə $BD = ?$

- A) 3 B) 4 C) 4,5 D) 5 E) 6



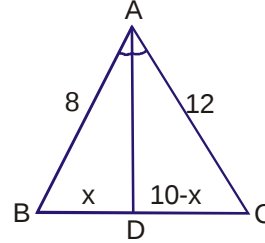
Həlli:

$$\frac{8}{12} = \frac{x}{10-x}$$

$$12x = 80 - 8x$$

$$20x = 80$$

$$x = 4 \text{ sm}$$



Cavab: B

2. AD tən böləndir. $AB = AD$, $BD = 6 \text{ sm}$, $DC = 8 \text{ sm}$ isə ABC üçbucağının perimetrini tapın

- A) 32 B) 36 C) 40 D) 42 E) 48

Həlli:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3x}{4x}$$

$AB = AD = 3x$, $AC = 4x$ ifadəsini daxili bucaq tən böləni düsturunda yerinə yazaq:

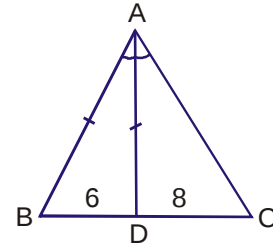
$$AD = \sqrt{AB \cdot AC - BD \cdot DC}$$

$$3x = \sqrt{3x \cdot 4x - 6 \cdot 8} \Rightarrow 9x^2 = 12x^2 - 48 \Rightarrow 3x^2 = 48$$

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \text{ sm}$$

$$AB = 3x = 12 \text{ sm}, AC = 4x = 16 \text{ sm}$$

$$P_{ABC} = 14 + 12 + 16 = 42 \text{ sm}$$



Cavab: D

3. ABC – düzbucaqlı üçbucaq, AD tən böləndir. $BD = 6 \text{ sm}$, $DC = 10 \text{ sm}$ isə $AC = ?$

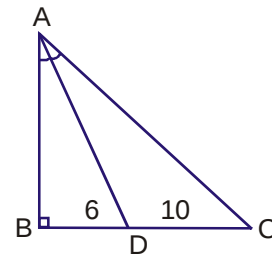
- A) 20 B) 22 C) 25 D) 30 E) 35

Həlli:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3x}{5x}$$

$BC = 4x = 16$ (misir üçbucağı olduğu üçün)

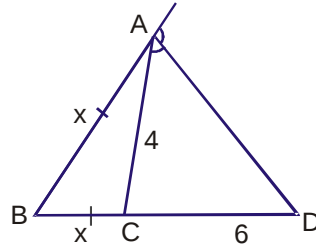
$$x = 4 \text{ sm}, AC = 5x = 5 \cdot 4 = 20 \text{ sm}$$



Cavab: A

4. AD, $\triangle ABC$ –nin xarici bucağının tən bölənidir. $AB = BC$, $AC = 4 \text{ sm}$, $CD = 6 \text{ sm}$ isə BC neçə sm-dir?

- A) 15 B) 12 C) 10 D) 9 E) 8



Həlli:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}, \quad \frac{x}{4} = \frac{x+6}{6}$$

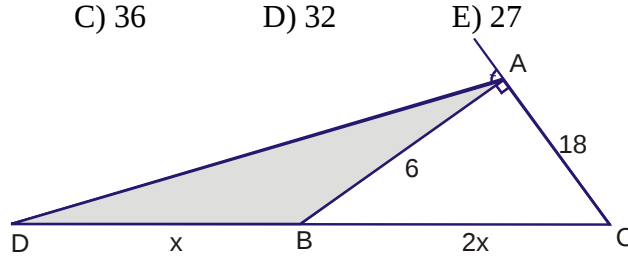
$$6x = 4x + 24$$

$$2x = 24, x = 12 \text{ sm}$$

Cavab: B

5. ABC – düzbucaqlı üçbucaqdır. AD – xarici bucağın tənbölənidir. AB = 6 sm, AC = 18 sm isə ABD üçbucağının sahəsi neçə sm^2 –dir ?

- A) 54 B) 48 C) 36 D) 32 E) 27



Həlli:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{x}{3x}$$

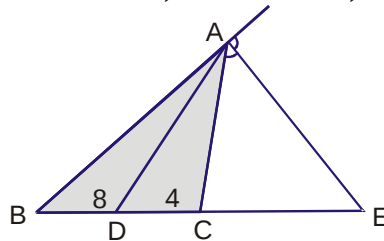
$$DB = x, DC = 3x, BC = 3x - x = 2x \text{ olur. } S_{ABC} = \frac{18 \cdot 6}{2} = 54 \text{ sm}^2$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADB}} = \frac{2x}{x} \Rightarrow \frac{54}{S_{ADB}} = \frac{2}{1} \Rightarrow S_{ADB} = 27 \text{ sm}^2$$

Cavab: E

6. ABC üçbucağında AD – daxili, AE – xarici bucağın tənbölənləridir. BD = 8 sm. DC = 4 sm isə CE = ?

- A) 9 B) 10 C) 12 D) 15 E) 18



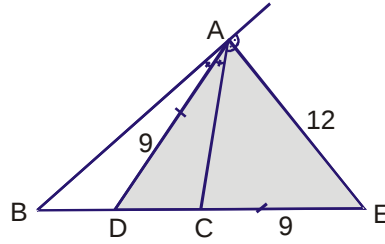
Həlli:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BE}{CE} = \frac{8}{4}, \quad \frac{12 + CE}{CE} = \frac{2}{1} \Rightarrow 2 \cdot CE = 12 + CE \Rightarrow CE = 12 \text{ sm.}$$

Cavab: C

7. $\triangle ABC$ –də AD – daxili AE – xarici bucağın tənbölənləridir. $AD = CE = 9$ sm, $AE = 12$ sm isə $DC = ?$

- A) 7 B) 6 C) 4 D) 3 E) 2



Həlli:

$\angle DAE = 90^\circ$ olduğu üçün $\triangle ADE$ də $DE^2 = AD^2 + AE^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$

$DE = 15$, $DC = DE - CE \Rightarrow DC = 15 - 9 = 6$ sm

Cavab: B

ÜÇBUCAĞIN NÖVLƏRİ

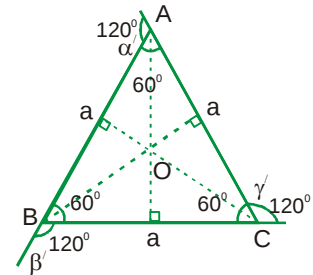
Bərabərtərəfli üçbucaq

1. $AB = AC = BC = a$

2. $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

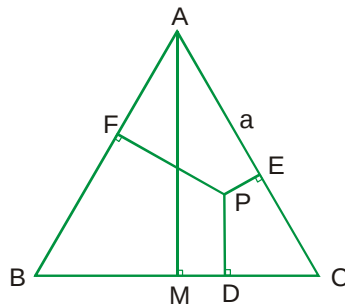
3. $\alpha' = \beta' = \gamma' = 120^\circ$

4. $h_a = h_b = h_c = m_a = m_b = m_c = l_a = l_b = l_c = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

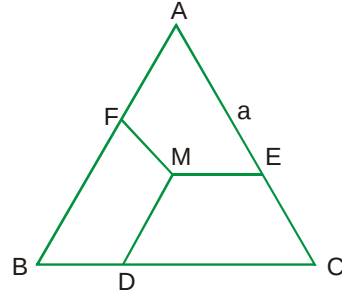


Əlavə xassələr

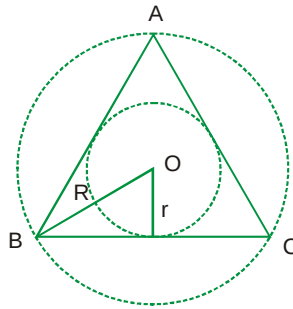
5. Bərabərtərəfli üçbucağın daxilində götürülmüş ixtiyari nöqtədən onun tərəflərinə qədər olan məsafələrin cəmi üçbucağın hündürlüyünə bərabərdir: $PD + PE + PF = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



6. Bərabərtərəfli üçbucağın daxilində götürülmüş ixtiyari nöqtədən tərəflərə paralel olaraq çəkilmiş düz xətt parçalarının cəmi üçbucağın tərəfinin uzunluğuna bərabərdir. $ME \parallel BC$, $MF \parallel AC$, $MD \parallel AB$ olarsa, $MD + ME + MF = a$

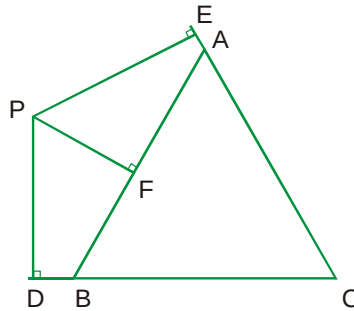


7. Bərabərtərəfli üçbucaqda hündürlüklər, medianlar və tənbölənlər eyni nöqtədə kəsişirlər. Bu nöqtə daxilə və xaricə çəkilmiş çevrələrin mərkəzidir. $O_h = O_r = O_m = O_R = O_I = O$

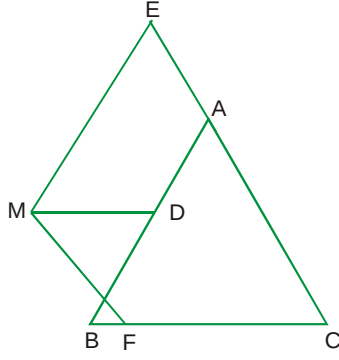


8. $R = 2r = \frac{2h}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $r = \frac{R}{2} = \frac{h}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $h = R + r$

9. Bərabərtərəfli ABC üçbucağında P üçbucaq xaricində yerləşən ixtiyari nöqtə və $PD \perp BC$, $PE \perp AC$, $PF \perp AB$ olarsa, $PD + PE - PF = h$ olar. Burada D, E və F nöqtələri uyğun olaraq BC, AC və AB düz xətləri üzərindədirlər.



10. Bərabərtərəfli ABC üçbucağında M üçbucaq xaricində yerləşən ixtiyari nöqtə və $MF \parallel AC$, $MD \parallel BC$, $ME \parallel AB$ olarsa, $ME + MF - MD = a$ olar. D, F və E nöqtələri uyğun olaraq AB, BC, AC düz xətləri üzərindədirlər.

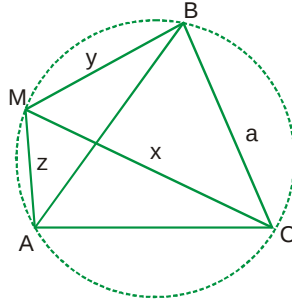


11. Bərabəryanlı üçbucaqda daxili bucaqlarından biri 60^0 -dirsə, bu üçbucaq bərabərtərəflidir.

12. Bərabəryanlı üçbucaqda yan tərəfə çəkilmiş median oturacaqla 30^0 -li bucaq təşkil edərsə, bu üçbucaq bərabərtərəflidir.

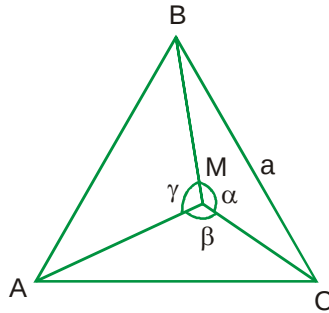
13. Bərabərtərəfli ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrə üzərində yerləşən ixtiyari M nöqtəsi üçün $MC = x$, $MB = y$, $MA = z$ olarsa, onda

1. $x = y+z$
2. $x^2+y^2+z^2=2a^2$



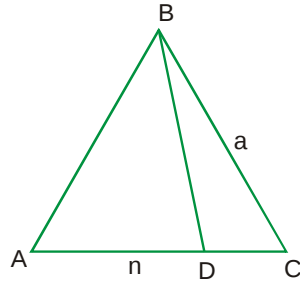
14. Bərabərtərəfli ABC üçbucağında M üçbucaq daxilində yerləşən ixtiyari nöqtə olmaqla, $\angle BMC = \alpha$, $\angle AMC = \beta$, $\angle AMB = \gamma$ olarsa, onda

$$AM : BM : CM = \sin(\alpha - 60^0) : \sin(\beta - 60^0) : \sin(\gamma - 60^0)$$



15. Bərabərtərəfli ABC üçbucağının AC tərəfi üzərində götürülmüş ixtiyari D nöqtəsi üçün $AD = n$ olarsa, onda

$$BD = a^2 - n(a-n)$$



16. Bərabərtərəfli ABC üçbucağının sahəsi aşağıdakı kimi tapılır:

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2 = 3\sqrt{3} r^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} h^2$$

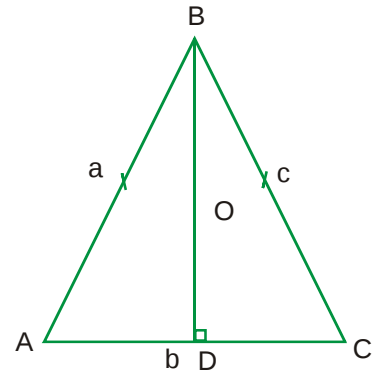
BƏRABƏRYANLI ÜÇBUCAQ

İki tərəfi bərabər olan üçbucağa bərabəryanlı üçbucaq deyilir:

$$AB = BC$$

Bərabəryanlı üçbucaqda oturacağa bitişik bucaqlar bərabərdir:

$$\angle A = \angle C$$

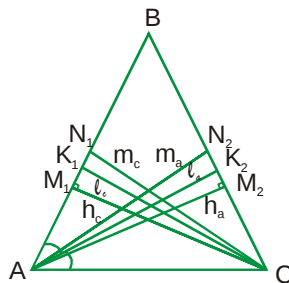


Ümumi xassələr

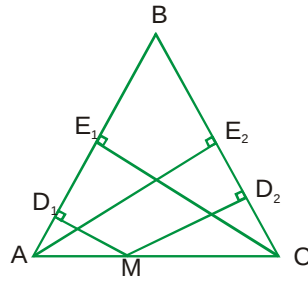
1. Bərabəryanlı üçbucaqda oturacağa edilmiş hündürlük eyni zamanda onun həm medianı, həm də tənbölənidir:

$$h_b = m_b = l_b$$

2. Bərbəryanlı $\triangle ABC$ -də $AB=BC$ olarsa $h_a=h_c, l_a=l_c, m_a=m_c$

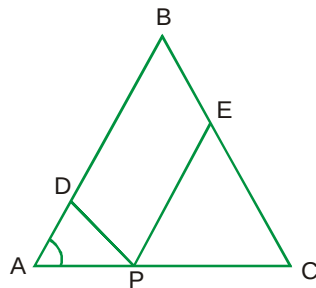


3. Bərabəryanlı üçbucaqda oturacaq üzərində götürülmüş ixtiyari nöqtədən yan tərəflərə qədər olan məsafələrin cəmi yan tərəfə çəkilmiş hündürlüyün uzunluğuna bərabərdir. $AB = BC$ isə $MD_1 + MD_2 = CE_1 = AE_2$

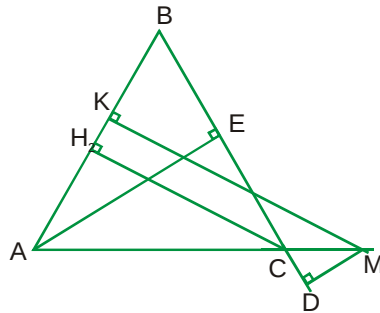


4. Bərabəryanlı üçbucaq üzərində götürülmüş ixtiyari nöqtədən yan tərəflərə paralel olaraq çəkilmiş düz

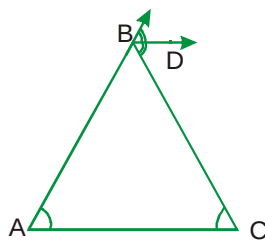
xətt parçalarının uzunluqları cəmi yan tərəfin uzunluğuna bərabərdir. $AB = BC$, $PE + PD = AB = BC$



5. Bərabəryanlı üçbucağın oturacağının uzantısı üzərində götürülmüş nöqtədən bərabər tərəflərə endirilmiş perpendikulyarın uzunluqları fərqi yan tərəfə çəkilmiş hündürlüyə bərabərdir. $AB = BC$ isə $MK - MD = AE = CH$



6. Bərabəryanlı üçbucaqda təpədəki xarici bucağın tənböləni oturacağa paraleldir. $AB = BC$ isə $BD \parallel AC$



7. Bərabəryanlı üçbucağın elementlərini hesablamaq üçün istifadə edilən düsturlar aşağıdakılardır:

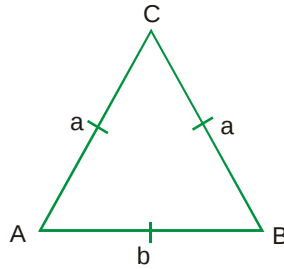
$$AC = BC = a \text{ isə}$$

$$h_a = h_b = \frac{2S}{a}; h_c = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 - c^2}$$

$$R = \frac{a^2}{2h_c}; r = \frac{ch_c}{2a+c} = \frac{c(2a-c)}{4h_c}$$

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = \frac{c}{4}\sqrt{4a^2 - c^2}$$

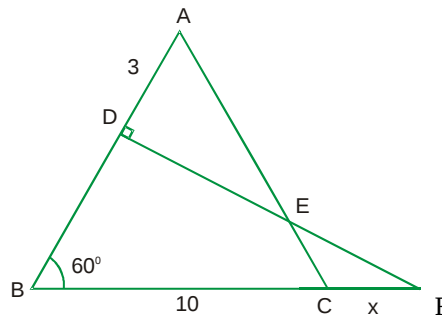
8. Bərabəryanlı üçbucaqda bucaqlardan biri 60° olarsa o eyni zamanda bərabərtərəfli üçbucaqdır.



NÜMUNƏLƏR:

1. Şəkində ABC bərabərtərəfli üçbucaqdır. $AB \perp DF$, $AD=3$, $BC=10$ isə $CF=x=?$

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7



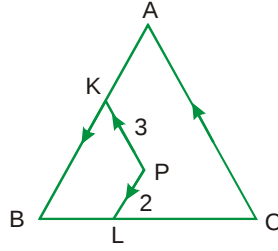
Həlli:

$BD = 10-3=7$, $\angle B = 60^\circ \Rightarrow \angle F = 30^\circ$. Düzbucaqlı $\triangle BDF$ -dən (BD kateti 30° -li bucaq qarşısında durur) $10+x=14 \Rightarrow x = 4$

Cavab: B

2. Bərabərtərəfli ABC üçbucağında $PL \parallel AB$, $PK \parallel CA$ -dır. $PK=3$ cm isə $P_{(BKPL)} = ?$

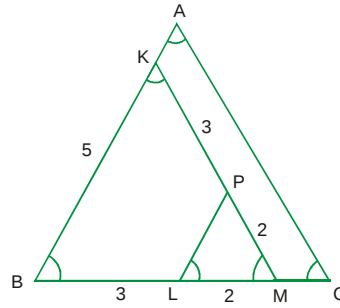
- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13



Həlli:

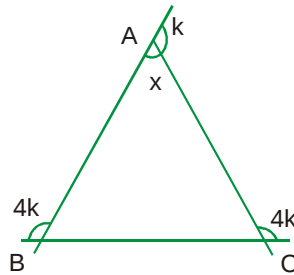
PLM – bərabərtərəfli üçbucaq olduğundan $PM=LM=2$ sm $\triangle KBM$ -də bərabərtərəflidir.

$KB=KM=BM=5$ sm və $BL = 5-2 = 3$ sm-dir. Buradan $P_{(BKPL)} = 5+3+2+3=13$ sm olur.



Cavab: E

3. Xarici bucaqlarının nisbəti 4:4:1 olan bərabəryanlı üçbucağın tərə bucağı neçə dərəcədir?
A) 120 B) 130 C) 140 D) 150 E) 160

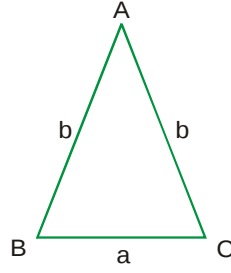


Həlli:

Xarici bucaqların qiymətləri $4k, 4k, k$ olsun. $4k+4k+k=360^0$, $9k = 360^0 \Rightarrow k = 40^0$.
 $\angle BAC = x = 180^0 - 40^0 = 140^0$.

Cavab: C

4. Perimetri 17 olan bərabəryanlı üçbucağın yan tərəflərinin uzunluğu tam ədədlə ifadə olunarsa neçə belə üçbucaq çəkmək olar?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

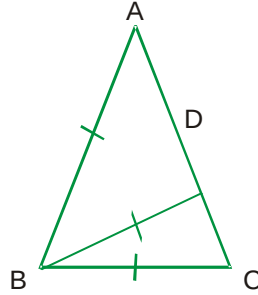


Həlli:

$a+2b=17$ olduğundan a tək ədəd olmalıdır. Digər tərəfdən $a < \frac{17}{2} = 8,5$ olduğundan a -nın ala biləcəyi qiymətlər 1, 3, 5, 7 ola bilər. Yəni 4 belə üçbucaq çəkilə bilər.

Cavab: D

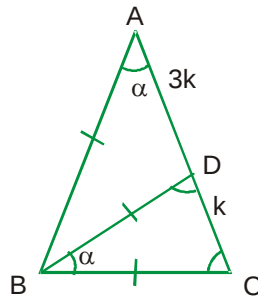
5. $\triangle ABC$ -də $AB=AC$, $BC=BD$ və $AD=3 \cdot CD$ -dir. $\frac{BD}{CD}$ - nisbəti neçədir?
 A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6



Həlli:

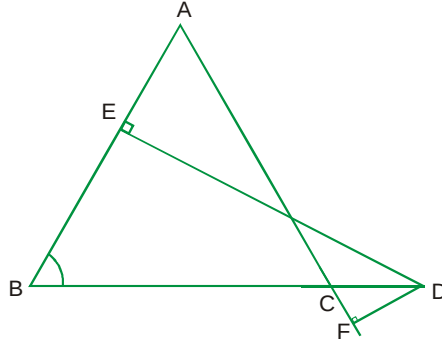
Tutaq ki, $CD=k$, onda $AD = 3k$ -dir. $\triangle ABC \sim \triangle BSD$ olduğundan, $\frac{BC}{k} = \frac{4k}{BC}$;

$BC^2 = 4k^2 \Rightarrow BC = 2k$. Onda $\frac{BD}{CD} = \frac{2k}{k} = 2$ olar.



Cavab: A

6. $\triangle ABC$ -də $AB=AC$, $DE=8\text{cm}$. $DC=5\text{cm}$. $CF=4\text{cm}$, $AC = 16\text{cm}$ isə $S_{(ABC)} = ?$
 A) 24 B) 32 C) 36 D) 40 E) 44

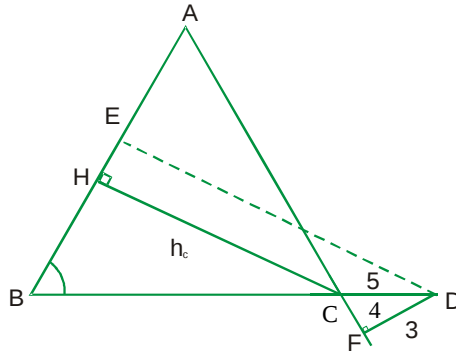


Həlli:

DFC düzbucaqlı üçbucağında $DF = 3$ (tərəfləri 3,4,5 olan düzbucaqlı üçbucaq).

$\triangle ABC$ bərabəryanlı olduğundan, $h = DE - DF = 8 - 3 = 5$ cm. Onda

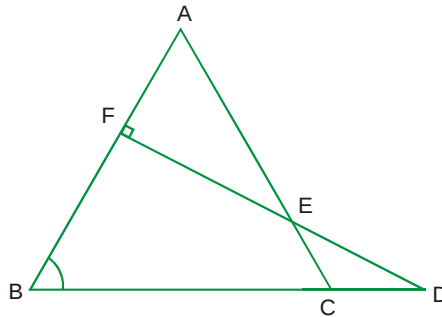
$$S_{(ABC)} = \frac{ch_c}{2} = \frac{16 \cdot 5}{2} = 40 \text{ cm}^2$$



Cavab: D

7. Şəkildə $\triangle ABC$ bərabərtərəfli üçbucaqdır. $CD = CE = AF = 4$ isə $S_{(ABC)} = ?$

- A) $12\sqrt{3}$ B) $36\sqrt{3}$ C) $48\sqrt{3}$ D) $32\sqrt{3}$ E) 16



Həlli:

$\triangle ABC$ bərabərtərəfli olduğundan, $\angle A = \angle ACB = 60^\circ$ $\angle ECD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$,

$\triangle ABC$ bərabəryanlı olduğundan, $\angle D = \angle DEC = 30^\circ$. ($\angle DEC = \angle AEF = 30^\circ$) $\triangle AFE$ -də $\angle A = 60^\circ$, $\angle AEF = 30^\circ \Rightarrow \angle AFE = 90^\circ$

Onda $AF = \frac{AE}{2}$ (30° -li bucaq qarşısında olduğuna görə) $AE=2 \cdot AF=2 \cdot 4=8$, $AC = AE+EC=8+4=12$

$$S_{(ABC)} = \frac{12^2 \sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$$

Cavab: B

8. Bərabərtərəfli üçbucaqda daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu $r = \sqrt[4]{3}$ olarsa bu üçbucağın sahəsini tapın.

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Həlli:

$$S = 3\sqrt{3} r^2 \text{ olduğunu nəzərə alsaq}$$

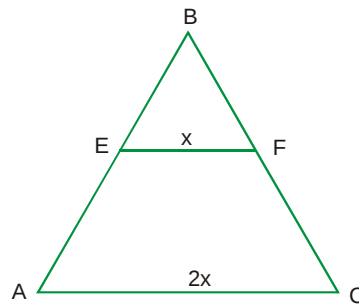
$$S = 3\sqrt{3} \cdot (\sqrt[4]{3})^2 = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot 3 = 9$$

$$S = 9 \text{ cm}^2$$

Cavab: A

9. Bərabəryanlı üçbucağın orta xətti paralel olduğu tərəfdən 6 sm kiçikdir. Üçbucağın perimetri 32 sm olarsa onun yan tərəfinin uzunluğunu tapın.

- A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25



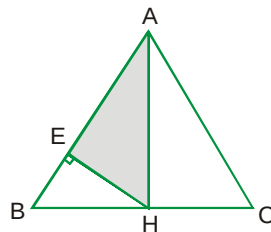
Həlli:

Tutaq ki, $EF=x$ -dir. Onda $AC = 2x$ olar. Şərtə əsasən $x=2x-6$, $x=6$ və $AC=2x = 12$ sm olar.

$$P_{(ABC)} = 32 \text{ sm olduğundan, } AB = \frac{32-12}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ sm}$$

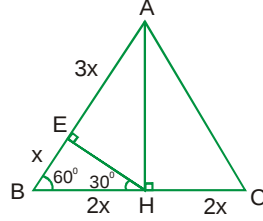
Cavab: B

10. $AH \perp BC$, $AB=AC=BC$, $HE \perp AB$ və $S_{AHE} = 6\sqrt{3}$ isə $S_{ABC} = ?$



- A) $36\sqrt{3}$ B) $28\sqrt{3}$ C) $24\sqrt{3}$ D) $18\sqrt{3}$ E) $16\sqrt{3}$

Həlli:



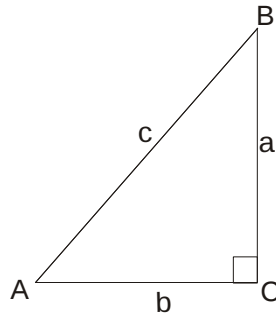
$\triangle BHE$ – də $BE = x$ isə $BH = 2x$, $BH = HC = 2x$, $BC = 4x$, $S_{AHE} = 6\sqrt{3}$ isə $S_{BHE} = 2\sqrt{3}$ -dür.
 $S_{ABC} = 2S_{AHE} = 2 \cdot 8\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

Cavab: E

DÜZBUCAQLI ÜÇBUCAQ

Pifaqor teoremi

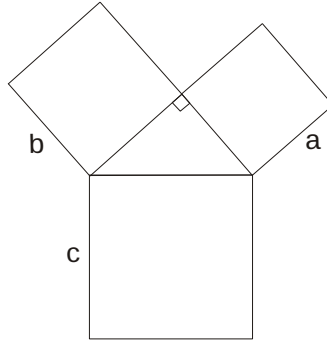
Teorem. Düzbucaqlı üçbucaqda hipotenuzun kvadratı katetlərin kvadratları cəminə bərabərdir.



$\triangle ABC$ -də $\angle C = 90^\circ$, $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$ isə $c^2 = a^2 + b^2$

Tərs teorem. Üçbucaqda bir tərəfin kvadratı o biri iki tərəfin kvadratları cəminə bərabədirsə, belə üçbucaq düzbucaqlı üçbucaqdır.

Həndəsi olaraq Pifaqor teoremini belə söyləmək olar: Düzbucaqlı üçbucaqda hipotenuz üzərində qurulmuş kvadratın sahəsi, katetlər üzərində qurulmuş kvadratların sahəsi cəminə bərabərdir.



$c^2 = a^2 + b^2$ bərabərliyini ödəyən ədədlərə Pifaqor ədədlər deyilir və onlar

$$a = m \cdot n, b = \frac{m^2 - n^2}{2}, c = \frac{m^2 + n^2}{2}$$

Düsturlarında m və n -ə qiymətlər verməklə tapılır.

Burada m , n qarşılıqlı sadə tək ədədlərdir. Məsələn,

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

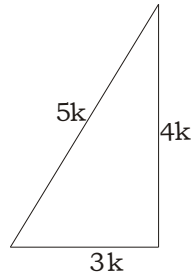
$$7^2 + 24^2 = 25^2$$

$$8^2 + 15^2 = 17^2$$

$$9^2 + 40^2 = 41^2$$

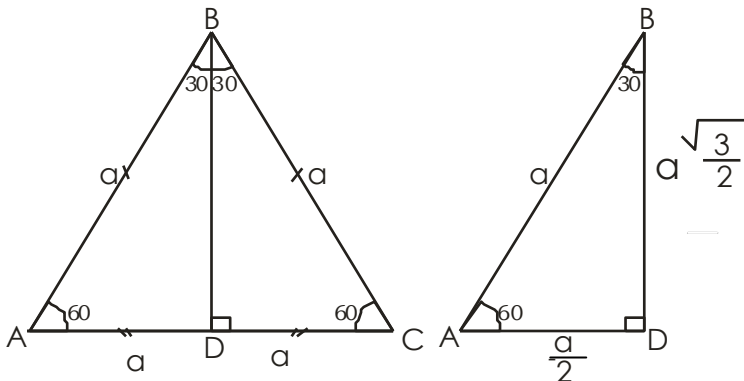
və s.

Ümumiyyətlə a , b , c ədədləri Pifaqor ədədlədirsə ka , kb , kc ($k > 0$) ədədləri də Pifaqor ədədləridir. Belə ədədlər sonsuz saydadır. Tərəflərin uzunluqları 3, 4, 5 və ya bu ədədlərin tam misilləri olan üçbucaqlar misir üçbucaqları adlanır.



Düzbucaqlı üçbucaqda 30° -li bucaq qarşısındakı katetin xassəsi.

Teorem: Düzbucaqlı üçbucaqda 30° -li bucaq qarşısında duran katet hipotenuzun yarısına bərabərdir.

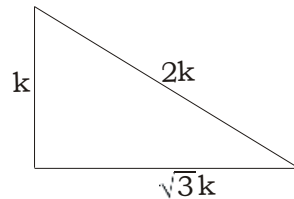


Nəticə:

1. Düzbucaqlı üçbucaqda 60° –li bucaq qarşısında duran katet 30° -li bucaq qarşısında duran katetin uzunluğunun $\sqrt{3}$ mislinə bərabərdir.

2. Düzbucaqlı üçbucağın kateti hipotenuzun yarısına bərabədirsə, o katet qarşısındakı bucaq 30° –dir

3. Hər hansı üçbucaqda tərəflərin uzunluqları $k, 2k, k\sqrt{3}$ kimidirsə, o düzbucaqlı üçbucaqdır.



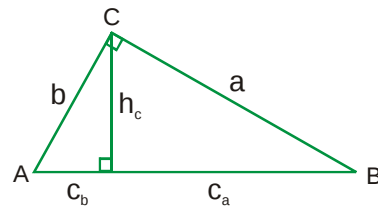
Xassələr

Düzbucaqlı üçbucağın katetin hipotenuzla bu katetin hipotenuz üzərindəki proyeksiyası arasında orta mütənasıbdır.

Düzbucaqlı $\triangle ABC$ -də c_a və c_b parçaları uyğun olaraq a və b katetlərinin c hipotenuzu üzərindəki proyeksiyası olarsa, onda

$$1. \frac{c_b}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = c_b \cdot c$$

$$2. \frac{c_a}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow a^2 = c_a \cdot c$$



$$3. \frac{b^2}{a^2} = \frac{c_b}{c_a}$$

Düzbucaqlı üçbucağın düz bucaq təpəsindən endirilmiş hündürlüyü katetlərin hipotenuz üzərindəki proyeksiyaları arasında orta mütənasıbdır.

$\triangle ABC$ -də h_c düz bucaq təpəsindən endirilmiş hündürlük olarsa, onda

$$4. h_c^2 = c_a \cdot c_b$$

Düzbucaqlı üçbucaqda m_a, m_b, m_c medianları üçün, uyğun olaraq

$$5. m_a = \frac{1}{2} \sqrt{4b^2 + a^2}$$

$$6. m_b = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + b^2}$$

$$7. m_c = \frac{1}{2} c, m_a^2 + m_b^2 = 5 m_c^2$$

Düzbucaqlı üçbucaqda h_a, h_b, h_c hündürlükləri üçün, uyğun olaraq

$$8. h_a = b$$

$$9. h_b = a$$

$$10. h_c = \frac{ab}{c}, \quad \frac{1}{h_c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

Düzbucaqlı üçbucaqda R, r uyğun olaraq xaricə və daxilə çəkilmiş çevrələrin radiusları olarsa, onda

$$11. R = \frac{c}{2}$$

$$12. r = \frac{a+b-c}{2}$$

Düzbucaqlı üçbucaqda ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c tən bölənləri üçün, uyğun olaraq

$$13. \ell_a = \sqrt{b^2 + \left(\frac{ab}{b+c}\right)^2}$$

$$14. \ell_b = \sqrt{a^2 + \left(\frac{ab}{a+c}\right)^2}$$

$$15. \ell_c = \frac{\sqrt{2} ab}{a+b}$$

Düzbucaqlı üçbucaqda sahə düsturları

$$16. S = \frac{1}{2} ab$$

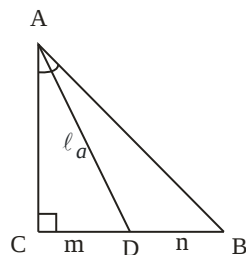
$$17. S = \frac{1}{2} ch_c$$

$$18. S = (p-a)(p-b)$$

$$19. S = p(p-c), \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

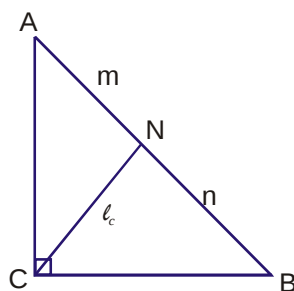
20. Düzbucaqlı $\triangle ABC$ –də $\angle C = 90^\circ$ -dir. İti bucağın $AD = \ell_a$ tən böləni BC tərəfini $BD=n$, $CD=m$ parçalarına bölürsə, onda:

$$\ell_a^2 = \frac{2m^2 n}{n-m}$$

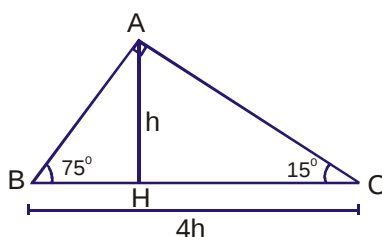


21. Düzbucaqlı $\triangle ABC$ -də $\angle C=90^\circ$ -dir. $CN=l_c$ tən bölməni hipotenuzu $AN = m$, $BN=n$ hissələrinə bölürsə, onda:

$$l_c = \frac{\sqrt{2mn}}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$



22. Düzbucaqlı üçbucaqda bucaqlardan biri 15° (və ya 75°) olarsa, hipotenuza endirilmiş hündürlük hipotenuzun $\frac{1}{4}$ hissəsinə bərabərdir: $BC = 4 \cdot AH$

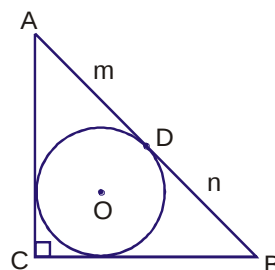


23. Düzbucaqlı $\triangle ABC$ -də ($\angle C=90^\circ$) aşağıdakı şəkildə sahə düsturları vardır:

$$1) S = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} ch_c$$

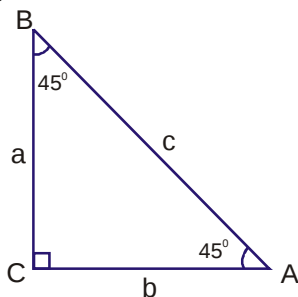
$$2) S = r(2R + r)$$

$$3) S = m \cdot n$$



Burada m və n daxilə çəkilmiş çevrənin toxunma nöqtəsində hipotenuzu ayırdığı hissələrin uzunluğudur.

24. Bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucağın elementləri arasında aşağıdakı münasibətlər vardır



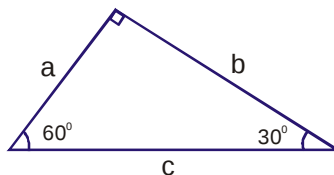
$$1) a = b = \frac{c}{\sqrt{2}} = R + r; \quad \alpha = \beta = 45^\circ$$

$$2) m_c = h_c = l_c = \frac{c}{2}; \quad m_a = m_b = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$3) R = \frac{c}{2} = (\sqrt{2} + 1)r; r = a - \frac{c}{2} = R(\sqrt{2} - 1)$$

$$4) S = \frac{c^2}{4} = \frac{a^2}{2} = R^2$$

25. Bir bucağı 30° olan düzbucaqlı üçbucağın elementləri arasındakı münasibətlər aşağıdakı kimidir:



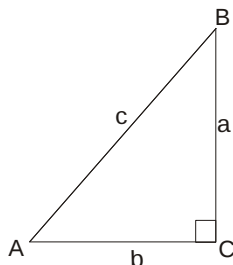
$$1) \alpha = 30^\circ; \quad \beta = 60^\circ; \quad a = \frac{c}{2}; \quad b = \frac{c\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

$$2) R = \frac{c}{2} = a = \frac{b}{\sqrt{3}}; \quad r = \frac{c}{4}(\sqrt{3} - 1) = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1) = \frac{b}{6}(3 - \sqrt{3});$$

$$3) S = \frac{\sqrt{3}}{8}c^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{b^2\sqrt{3}}{6}$$

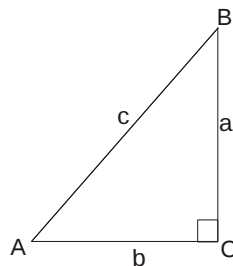
Düzbucaqlı üçbucağın tərəfi və bucaqları arasındakı münasibətlər

Düzbucaqlı üçbucaqla iti bucağın triqonometrik funksiylarının tərifinə əsasən aşağıdakı qaydaları söyləmək olar:

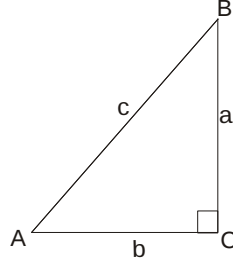


1. Üçbucağın kateti, qarşısındakı bucağın sinusu ilə hipotenuzun hasilinə bərabərdir
 $a = c \cdot \sin \alpha, \quad b = c \cdot \sin \beta$

2. Düzbucaqlı üçbucağın kateti, bitişik bucağın kosinusu ilə hipotenuzun hasilinə bərabərdir. $a = c \cdot \cos \beta, \quad b = c \cdot \cos \alpha$



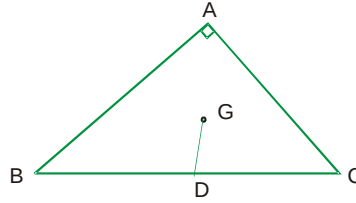
3. Düzbucaqlı üçbucağın kateti, qarşısındakı bucağın tangensi ilə digər katetin hasilinə bərabərdir. $a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$, $b = a \cdot \operatorname{tg} \beta$



Bu qaydaların köməyi ilə düzbucaqlı üçbucağın bir məlum tərəfi və iti bucağına görə digər tərəfini və ya iki məlum tərəfinə görə iti bucaqlarını tapmaq olar.

NÜMUNƏLƏR:

1. $\angle A = 90^\circ$, G – ağırlıq mərkəzi və $BD=DC$ -dir. $GD = 6\text{sm}$ isə BC neçə sm-dir?



- A) 12 B) 18 C) 24 D) 30 E) 36

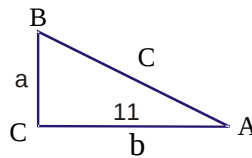
Həlli:

$BD=DC$ və G – ağırlıq mərkəzi isə AD medianıdır. $AG:GD = 2:1$, $AG=2GD=12\text{sm}$
 $\triangle ABC$ – düzbucaqlı üçbucaq və AD – median olduğundan, $AD = BD = DC = R$ -dir.
 $BC = 2AD = 2 \cdot (12+6) = 36\text{ sm}$

Cavab: E

2. Düzbucaqlı üçbucağın tərəfləri tam ədədlərlə ifadə olunur və katetlərdən biri 11 sm-dir. Onun sahəsini tapın.

- A) 165 B) 220 c) 275 D) 330 E) 385



Həlli:

Pifaqor teoreminə görə $a^2 + b^2 = c^2$ $c^2 - a^2 = 11^2 \Rightarrow (c-a)(c+a) = 121 \Rightarrow$

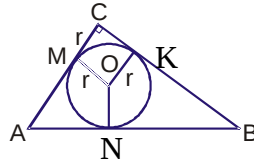
$$\Rightarrow \begin{cases} c - a = 1 \\ c + a = 121 \end{cases} \Rightarrow 2c = 122 \Rightarrow c = 61, a = 60$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 11 = 330 \text{ sm}^2$$

Cavab: D

3. Düzbucaqlı üçbucağın katetlərinin cəmi 12 sm-dir. Bu üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiusları cəmi neçə sm-dir?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 12



Həlli:

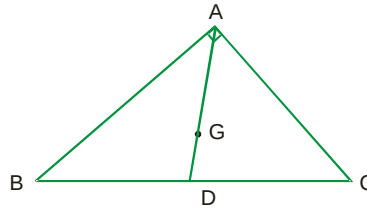
$\triangle ABC$ -də $\angle C = 90^\circ$ isə $AB = 2R$ -dir

$$AC + CB = AM + MC + CK + KB = (AM + BK) + (MC + CK) = (AN + NB) + (MO + ON) = 2R + 2r = 2(R+r)$$

$$2(R+r) = 12 \Rightarrow R + r = 6 \text{ sm}$$

Cavab: D

4. $\angle A = 90^\circ$, G – ağırlıq mərkəzi və $BD = DC$ -dir. $GD = 6 \text{ sm}$ isə BC neçə sm-dir?



- A) 12 B) 18 C) 24 D) 30 E) 36

Həlli:

$BD = DC$ və G – ağırlıq mərkəzi isə AD medianıdır. $AG:GD = 2:1$, $AG = 2GD = 12 \text{ sm}$

$\triangle ABC$ – düzbucaqlı üçbucaq və AD – median olduğundan,

$$AD = BD = DC, BC = 2AD = 2 \cdot (12+6) = 36 \text{ sm}$$

Cavab: E

5. ABC – düzbucaqlı üçbucaq, AD tənböləndir. $BD = 6 \text{ sm}$, $DC = 10 \text{ sm}$ isə $AC = ?$

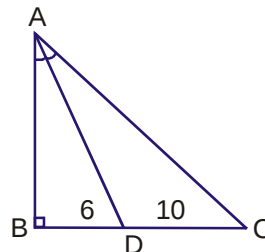
- A) 20 B) 22 C) 25 D) 30 E) 35

Həlli:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3x}{5x}$$

$$BC = 4x = 16 \text{ (misir üçbucağı olduğu üçün)}$$

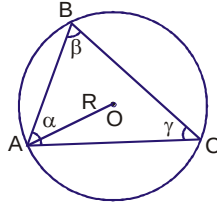
$$x = 4 \text{ sm}, AC = 5x = 5 \cdot 4 = 20 \text{ sm}$$



Cavab: A

Sinuslar və kosinuslar teoremi

Teorem (sinuslar). Üçbucağın tərəflərinin uyğun qarşı bucaqların sinuslarına nisbətləri bərabər olub, üçbucaq xaricinə çəkilmiş çevrənin diametrinə bərabərdir.



$\triangle ABC$ - və $BC = a, AC = b, AB = c$ $\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$,

R – xaricə çəkilmiş çevrənin radiusu olarsa, onda

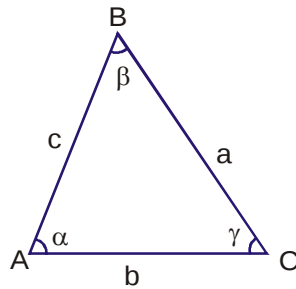
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Nəticə: Üçbucaqda böyük tərəf qarşısında böyük bucaq və həmçinin, böyük bucaq qarşısında böyük tərəf durur.

Başqa sözlə,

$$a < b < c \Leftrightarrow \alpha < \beta < \gamma$$

Teorem (kosinuslar). Üçbucağın ixtiyari tərəfinin kvadratı bərabərdir: digər tərəflərin kvadrları cəmi, minus bu tərəflərin uzunluqları ilə onlar arasındakı bucağın kosinusu həllinin iki misli



Başqa sözlə, tərəfləri a, b, c uyğun bucaqları α, β, γ olan $\triangle ABC$ -də aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

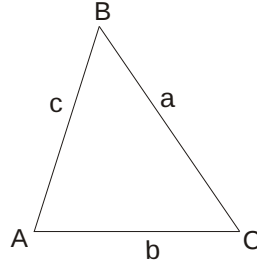
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Üçbucaqların həlli.

Üçbucaqları həll edərkən əsasən dörd hala baxılır. Bunlardan hər birini ayrı-ayrılıqda nəzərdən keçirək. Baxılan üçbucağın tərəfləri a, b, c uyğun bucaqları α, β, γ olsun.

1. Üç tərəfinə görə üçbucağın həlli

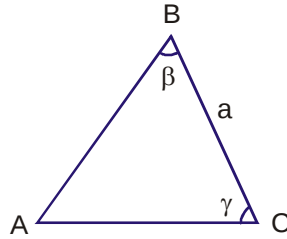


Verilir: a, b və c .

Tapmalı: α, β və γ .

Həlli: α və β bucaqları kosinuslar və sinuslar teoreminə görə tapılır. Kosinuslar teoreminə əsasən $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Sinuslar teoreminə əsasən $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$. Burada, γ bucağı α, β -ni 180° -yə tamamlayan bucaq kimi tapılır: $\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$. Nəticənin yoxlanılması $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$ düsturuna əsasən aparılır.

2. Bir tərəfinə və ona bitişik iki bucağına görə üçbucağın həlli



Verilir: α, β və γ .

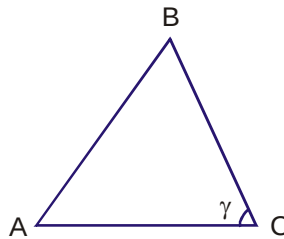
Tapmalı: b, c və a .

Həlli: b və c tərəflərinin uzunluqları sinuslar teoreminə görə tapılır:

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}, c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

α bucağı $\alpha = 180 - (\beta + \gamma)$ düsturuna əsasən tapılır. Nəticənin doğruluğu kosinuslar teoreminə əsasən yoxlanılır.

3. İki tərəfi və onlar arasındakı bucağa görə üçbucağın həlli



Verilir: a, b və γ .

Tapmalı: c, α və β .

Həlli: c tərəfinin uzunluğu kosinuslar teoreminə görə tapılır.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$$

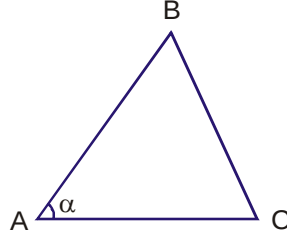
Digər tərəfdən sinuslar teoreminə görə:

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b}{c} \sin \gamma$$

α bucağı $\alpha = 180 - (\beta + \gamma)$ düsturuna əsasən aparılır.

Nəticənin doğruluğu $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$ bərabərliyinə əsasən yoxlanılır.

4. İki tərəfinə və bunlardan birinin qarşısındakı bucağa görə üçbucağın həlli



Verilir: a, b və α

Tapmalı: β, γ və c .

Həlli: sinuslar teoreminə əsasən

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha$$

γ bucağı və β bucaqlarını 180° -yə tamamlayan bucaq kimi tapılır:

$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$$

Sinuslar teoremini ikinci dəfə tətbiq edərək

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

ifadəsindən c -nin qiymətini tapmaq olar.

Nəticənin doğruluğu kosinuslar teoreminə əsasən yoxlanılır:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

NÜMUNƏLƏR:

1. ABC üçbucağında $\angle A = 60^\circ$, $AB = 2$ sm, $AC = 3$ sm –dir. BC –ni tapın.

Həlli:

Kosinuslar teoreminə görə $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos \angle A$ və ya $BC^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot$

$3 \cos 60^\circ = 4 + 9 - 6 = 7$, $BC = \sqrt{7}$ sm $\approx 2,65$ sm.

2. ABC üçbucağında $\angle C = 90^\circ$, $AC = 2$ sm, $BC = \sqrt{5}$ sm olarsa, AB tərəfini tapın.

Həlli:

Düzbucaqlı ABC üçbucağında AB hipotenuzunu Pifaqor teoreminə görə tapaq:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 4 + 5 = 9$ və ya $AB = 3$ sm

3. ABC üçbucağında $AB = 6$ sm, $AC = 4$ sm və $\angle BAC = 120^0$ -yə bərabərdir. BC tərəfinin uzunluğunu tapın.

Həlli:

Kosinuslar teoreminə görə $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cos 120^0 = 36 + 16 + 24 = 76$

Buradan $BC = \sqrt{76} \approx 8,72$ sm alırıq.

4. Üçbucağın tərəfləri 9 sm, 10 sm və 11 sm-ə bərabərdir. Bu üçbucağın böyük bucağının kosinusunu tapın.

Həlli:

Tutaq ki, tərəfləri a , b və c olan üçbucaqda $a = 9$ sm, $b = 10$ sm, $c = 11$ sm-dir. Üçbucaqda böyük bucaq böyük tərəf qarşısında durduğu üçün, c tərəfi qarşısında olan bucaq ən böyük bucaq olur.

Bu bucaq γ olsun. Onda

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Buradan $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{9^2 + 10^2 - 11^2}{2 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1}{3}$ yəni üçbucağın böyük bucağının kosinusu $\frac{1}{3}$ -ə bərabərdir.

5. Üçbucağın tərəfləri 4 sm, 5 sm və 6 sm-ə bərabərdir. Bu üçbucağın kiçik bucağının kosinusunu tapın.

Həlli:

Tutaq ki tərəfləri a , b və c olan üçbucaqda $a = 4$ sm, $b = 5$ sm –dir. Üçbucaqda kiçik tərəf qarşısında kiçik bucaq durduğu üçün, a tərəfi qarşısında olan bucaq ən kiçik bucaq olur. Bu bucaq α olsun. Onda $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$. Buradan

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{3}{4}$$

Yəni üçbucağın kiçik bucağının kosinusu $\frac{3}{4}$ -dir.

6. Tərəfləri:

a) 5,6,7; b) 40,41,9; c) 9,5,7 olan üçbucaqların itibucaqlı, korbucaqlı və ya düzbucaqlı üçbucaq olduğunu müəyyən edin.

Həlli:

Tərəfləri a , b və c olan üçbucağın böyük tərəfi c olsun. Onda əgər

$c^2 > a^2 + b^2$ olarsa, verilmiş üçbucaq korbucaqlı,

$c^2 = a^2 + b^2$ olarsa, verilmiş üçbucaq düzbucaqlı,

$c^2 < a^2 + b^2$ olarsa, verilmiş üçbucaq itibucaqlı olar.

Onda a) $7^2 < 5^2 + 6^2$ olduğundan, verilmiş üçbucaq itibucaqlıdır;

b) $41^2 = 40^2 + 9^2$ olduğundan, verilmiş üçbucaq düzbucaqlıdır;

c) $9^2 > 5^2 + 7^2$ olduğundan, verilmiş üçbucaq korbucaqlı üçbucaqdır.

7. Üçbucağın tərəfləri 5 m və 6m, onlar arasındakı bucağın sinusu isə 0,6 –ya bərabərdir. Bu üçbucağın üçüncü tərəfini tapın.(iki hala baxın).

Həlli:

Tərəfləri a, b və c olan üçbucaqda $a = 5\text{m}$, $b = 6\text{m}$, bu tərəflər arasındakı γ bucağının sinusu $\sin\gamma$ olsun. c tərəfini tapaq. Bunun üçün kosinuslar teoremini tətbiq edək:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Burada $\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \sin^2\gamma} = \pm 0,8$.

γ bucağı iti bucaq olarsa, $\cos\gamma = 0,8$, kor bucaq olarsa, $\cos\gamma = -0,8$ olar. Onda I halda,

$$c^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 0,8 = 13, c = \sqrt{13}\text{ sm};$$

II halda,

$$c^2 = 5^2 + 6^2 + 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 0,8 = 109, c = \sqrt{109}\text{ sm olar.}$$

8. Bərabəryanlı üçbucağın oturacağı 2 sm, yan tərəfi 6 sm-dir. Yan tərəflərin əmələ gətirdiyi bucağın sinusunu tapın.

Həlli:

Tutaq ki, ABC üçbucağında $a = c = 6\text{ sm}$, $b = 2\text{sm}$ -dir. β bucağının sinusunu tapaq. Kosinuslar teoreminə görə

$$b^2 = 2a^2 - 2a^2\cos\beta,$$

$$\cos\beta = \frac{2a^2 - b^2}{2a^2} = \frac{2 \cdot 6^2 - 2^2}{2 \cdot 6^2} = \frac{17}{18},$$

$$\text{Buradan, } \sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{17^2}{18^2}} = \frac{\sqrt{35}}{18}$$

9. İki tərəfi və onların arasındakı bucağına görə üçbucağı həll edin:

$$a = 22; b = 26; \gamma = 78^\circ;$$

Həlli:

$a = 22$, $b = 26$, $\gamma = 78^\circ$; c, α və β -ni tapaq. Kosinuslar teoreminə görə

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = \sqrt{22^2 + 26^2 - 2 \cdot 22 \cdot 26 \cdot \cos 78^\circ} = \sqrt{484 + 676 - 44 \cdot 26 \cdot 0.2079} = \sqrt{922,16} \approx 30,36$$

$$\text{Yenə kosinuslar teoremindən alınır ki, } \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx \frac{26^2 + 30,36^2 - 22^2}{2 \cdot 26 \cdot 30,36} \approx 0,7055$$

Buradan $\alpha \approx 45^\circ 8'$

Üçbucağın bucaqlarının cəmi haqqında teoremə görə $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) \approx 180^\circ - (45^\circ 8' + 78^\circ) = 56^\circ 52'$. Beləliklə $c \approx 30,36$; $\alpha \approx 45^\circ 8'$; $\beta \approx 56^\circ 52'$

10. Oturacağının uzunluğu 10 sm, oturacağa bitişik bucaqlarından biri 45° , oturacaq qarşısındakı bucağı 60° olan üçbucağın 45° qarşısındakı tərəfinin uzunluğunu tapın.

Həlli: Axtarılan tərəfi x ilə işarə edək. Onda sinuslar teoreminə əsasən:

$$\frac{x}{\sin 45^0} = \frac{10}{\sin 60^0}, \quad x = \frac{10 \cdot \sin 45^0}{\sin 60^0}$$

$$x = \frac{10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 10 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{10\sqrt{6}}{3} \text{ olar.}$$

Üçbucaqların həllinin qeyri əsas halları

1. $\triangle ABC$ –nin α , β bucaqları və $2p = a + b + c$ perimetri verilmişdir. a , b , c tərəflərini və γ bucağını tapın.

Həlli: Məlum α və β bucaqlarına görə γ bucağı tapılır: $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$. Digər tərəfdən bərabər nisbətlər sırasına görə

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{p}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}$$

$$\text{Buradan: } a = \frac{p \sin \alpha}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{2p \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{p \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}$$

$$b = \frac{p \sin \beta}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{2p \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{p \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}$$

$$c = \frac{p \sin \gamma}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{2p \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{p \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}$$

Məsələnin yeganə həlli vardır. Nəticənin doğruluğunu kosinuslar teoreminə əsasən yoxlamaq olar.

2. $\triangle ABC$ -nin h_a , h_b , h_c hündürlükləri verilmişdir. Üçbucağın tərəflərini və bucaqlarını tapın.

Həlli:

Məlumdur ki, üçbucağın sahəsi

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c. \text{ Onda } \frac{a}{1/h_a} = \frac{b}{1/h_b} = \frac{c}{1/h_c} = 2S$$

Tərəfləri $a_1 = \frac{1}{h_a}, b_1 = \frac{1}{h_b}, c_1 = \frac{1}{h_c}$ olan $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle ABC$ -yə oxşardır (oxşarlığın 3-cü əlamətinə

görə). Oxşar üçbucaqlarda uyğun tərəflər qarşısında bucaqlar bərabər olduğundan $\alpha = \alpha_1$,

$\beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1$. Burada $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ bucaqları məlum

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{\frac{(p-b_1)(p-c_1)}{p(p-a_1)}}, \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} = \sqrt{\frac{(p-a_1)(p-c_1)}{p(p-b_1)}}, \operatorname{tg} \frac{\gamma_1}{2} = \sqrt{\frac{(p-a_1)(p-b_1)}{p(p-c_1)}} \text{ düsturlara əsasən tapılır,}$$

$$p = \frac{1}{2}(a_1 + b_1 + c_1). \Delta ABC\text{-nin tərəflərini } a = \frac{h_b}{\sin \gamma}, b = \frac{h_a}{\sin \gamma}, c = \frac{h_a}{\sin \beta} \text{ ifadələrinə əsasən}$$

tapmaq olar. Məsələnin həllinin olması üçün $\Delta A_1B_1C_1$ -də üçbucaq bərabərsizliyi doğru olmalıdır.

$$\text{Başqa sözlə } |b_1 - c_1| < a_1 < b_1 + c_1 \text{ və ya } \left| \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \right| < \frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

3. ΔABC -də α, β bucaqları və ab hasilı verilir. Üçbucağın a, b, c tərəflərini və γ bucağını tapın.

Həlli: Məlum α və β bucaqlarına əsasən $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ tapılır.

Sinuslar teoreminə görə

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \Rightarrow a^2 = \frac{ab \sin \alpha}{\sin \beta} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{ab \sin \alpha}{\sin \beta}}. \text{ Uyğun qayda ilə } b = \sqrt{\frac{ab \sin \beta}{\sin \alpha}} \text{ tərəfi tapılır.}$$

Sinuslar teoremini ikinci dəfə tətbiq etsək,

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \Rightarrow c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{ab \sin \alpha}{\sin \beta}} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{ab \sin^2 \gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}} \text{ olar.}$$

4. ΔABC -də α, β bucaqları və daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu verilmişdir. Üçbucağın tərəflərinin uzunluğunu tapın.

Həlli: γ bucağı məlum α, β bucaqlarına əsasən $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ ifadəsindən tapılır.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a}, \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{r}{p-b}, \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p-c} \text{ düsturlarında}$$

$$p-a = \frac{b+c-a}{2}, p-b = \frac{a+c-b}{2}, p-c = \frac{a+b-c}{2} \text{ ifadələrini nəzərə alsaq,}$$

$$\begin{cases} b+c-a = 2r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \\ a+c-b = 2r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \\ a+b-c = 2r \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \end{cases}$$

alırıq. Bu tənliklər sistemini a, b və c -yə nəzərən həll etsək,

$$a = \frac{2r \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}, b = \frac{2r \cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}, c = \frac{2r \cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}} \text{ alırıq.}$$

5. ΔABC -nin α bucağı, S sahəsi və daxilə çəkilmiş çevrənin r radiusu verilmişdir. Üçbucağın bucaqlarını və tərəflərinin uzunluqlarını tapın.

Həlli: Məlum $tg \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a}$ düsturundan istifadə edək. Buradan $a = p - rctg \frac{\alpha}{2}$. Bu ifadədə

$p = \frac{S}{r}$ olduğunu nəzərə alsaq, $a = \frac{S}{r} - rctg \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{r}(S - r^2ctg \frac{\alpha}{2})$. Üçbucağın bir tərəfinə və ona

bitişik iki bucağına görə sahə düsturu $S = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$ -dir. Buradan

$$2S \sin \alpha = \frac{1}{2} a^2 (\cos \frac{\beta - \gamma}{2} - \cos \frac{\beta + \gamma}{2}) = \frac{1}{2} a^2 (\cos \frac{\beta - \gamma}{2} - \sin \frac{\alpha}{2})$$

Sonuncu tənliyi $\cos \frac{\beta - \gamma}{2}$ -yə görə həll etsək, $\cos \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{4S \sin \alpha}{a^2} + \sin \frac{\alpha}{2}$ alarıq. Bu tənliyi

$\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$ ilə birgə həll etsək, β və γ - nı alarıq. Göründüyü kimi verilmiş məsələ bundan əvvəlki məsələyə gəlir, yəni a , b və c -ni tapmaq üçün bu məsələnin nəticələrindən istifadə etmək olar. Məsələnin o vaxt yeganə həlli vardır ki, $S > r^2ctg \frac{\alpha}{2}$ olsun.

6. $\triangle ABC$ -nin $2p$ perimetri, α bucağı və daxilə çəkilmiş çevrənin r radiusu verilmişdir. Üçbucağın tərəfləri və bucaqlarını tapın.

Həlli:

I üsul

Bərabər nisbətlər sırasına görə $\frac{p}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{r}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}$. Buradan

$ctg \frac{\beta}{2} ctg \frac{\gamma}{2} = \frac{2p}{r} tg \frac{\alpha}{2}$. Bu tənliyi $\beta + \gamma = 180 - \alpha$ tənliyi ilə birlikdə həll edərək β və γ

bucaqlarını tapmaq olar. Bu məsələ β , γ və r elementlərinə görə üçbucağın həllinə gəlir.

II üsul

Məlum $tg \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a}$ düsturuna əsasən $a = p - rctg \frac{\alpha}{2}$, $b + c = 2p - a$ ifadəsini və a -nın qiymətini

Molveydə düsturunda nəzərə alsaq, β və γ bucaqları arasında $\cos \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{b+c}{a} \sin \frac{\alpha}{2}$ asılılığını

alarıq. Sonuncu tənliyi $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$ bərabərliyi ilə birgə həll etsək, β və γ bucaqlarını tapa bilərik. a , b , c tərəflərini tapmaq üçün 4-cü məsələnin nəticəsindən istifadə etmək olar.

7. $\triangle ABC$ -nin a , b tərəfləri və xaricə çəkilmiş çevrənin radiusu R verilmişdir. Üçbucağın bucaqlarını və c tərəfini tapın.

Həlli:

Üçbucağın bucaqlarını sinuslar teoreminə görə tapmaq olar:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = 2R \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a}{2R}, \sin \beta = \frac{b}{2R}. \text{ Burada } \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \text{ bərabərliyindən tapılır.}$$

Üçbucağın tərəflərindən və çevrənin diametrindən asılı olaraq məsələnin həllində bir neçə hal mümkündür. Bu halların hər birini ayrılıqda nəzərdən keçirək.

1) Tutaq ki $a > 2R$ və ya $b > 2R$. Bu halda $\sin \alpha > 1$ və ya $\sin \beta > 1$ olduğu üçün, belə üçbucaq mümkün deyil.

2) Tutaq ki, $a = 2R$ və ya $b = 2R$. Bu halda $\sin \alpha = 1$ və ya $\sin \beta = 1$. Onda belə üçbucaq düzbucaqlı üçbucaqdır. a və ya b tərəflərindən biri uzunluğu $2R$ olan düzbucaqlı üçbucağın hipotenuzudur. c tərəfi məlum a və b tərəflərinə görə Pifaqor teoremindən istifadə edilməklə tapılır.

3) Tutaq ki $a < 2R$ və $b < 2R$. Onda c tərəfi sinuslar teoreminə görə tapılır: $c = 2R \sin \gamma$. Bu ifadəni aşağıdakı şəkildə yazmaq:

$$c = 2R \sin \gamma = 2R \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) = 2R \sin(\alpha + \beta) = 2R \sin \alpha \cos \beta + 2R \sin \beta \cos \alpha = a \cos \beta + b \cos \alpha.$$

$$\text{Əgər } a = b \text{ olarsa, } \alpha = \beta \text{ bucaqları iti bucaqlardır və } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2R}\right)^2} = \frac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R},$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2} = \frac{\sqrt{4R^2 - b^2}}{2R}$$

Bu alda üçbucaq bərabəryanlıdır və $c = \frac{a\sqrt{4R^2 - a^2}}{R}$. Əgər $a \neq b$ olarsa, α və β

bucaqlarından hər hansı biri kor bucaq ola bilər. Onda bucaqların kosinuslarından birinin qarşısında “müsbət” digərinin qarşısında “mənfi” işarəsi yazmaq lazımdır, yəni

$$c = \frac{1}{R} \left(a\sqrt{4R^2 - b^2} - b\sqrt{4R^2 - a^2} \right) \text{ və ya } c = \frac{1}{R} \left(-a\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2} \right). \text{ Yazılanları}$$

ümumiləşdirsək belə nəticə çıxarmaq olar. $a > 2R, b > 2R$ və ya $a = b = 2R$ olarsa, belə üçbucaq

yoxdur. $a = 2R, b < 2R$ (və ya $b = 2R, a < 2R$) olarsa, yeganə belə düzbucaqlı üçbucaq vardır

və $c = \sqrt{4R^2 - b^2}$ (və ya $c = \sqrt{4R^2 - a^2}$). Əgər $a = b < 2R$ olarsa, belə üçbucaq bərabəryanlıdır və

$$c = \frac{a\sqrt{4R^2 - a^2}}{R}. \text{ Nəhayət əgər } a < 2R, b < 2R (a \neq b) \text{ olarsa, belə iki üçbucaq vardır və}$$

$$c = \pm \frac{1}{R} (a\sqrt{4R^2 - b^2} - b\sqrt{4R^2 - a^2}).$$

8. $\triangle ABC$ -də a, b tərəfləri və h_a hündürlüyü verilmişdir. Üçbucağın c tərəfini və bucaqlarını tapın.

Həlli:

Üçbucağın sahə düsturundan istifadə edək:

$$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \Rightarrow \sin \gamma = \frac{h_a}{b}. \text{ Əgər } b < h_a \text{ olarsa, belə üçbucaq yoxdur, əgər } b = h_a \text{ olarsa, } \gamma =$$

90° və $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ olar. Əgər $b > h_a$ olarsa, iki hal mümkündür:

$\gamma = \arcsin \frac{h_a}{b}$ və ya $\gamma = \pi - \arcsin \frac{h_a}{b}$. Kosinuslar teoremindən istifadə edək:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ Burada $\gamma = \arcsin \frac{h_a}{b}$ olanda, $\cos \gamma = \sqrt{1 - \frac{h_a^2}{b^2}}$, $\gamma = \pi - \arcsin \frac{h_a}{b}$ olanda,

$\cos \gamma = -\sqrt{1 - \frac{h_a^2}{b^2}}$. Beləliklə $b > h_a$ olarsa, $c = \sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ab \sqrt{1 - \frac{h_a^2}{b^2}}}$. c tərəfini tapdıqdan sonra α

və β bucaqlarını aşağıdakı kimi hesablamaq olar:

$$\sin \beta = \frac{h_a}{c} \Rightarrow \beta = \arcsin \frac{h_a}{c}, \alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$$

9. $\triangle ABC$ -də a və b tərəfləri və h_c hündürlüyü verilmişdir. Üçbucağın c tərəfini və bucaqlarını tapın.

Həlli:

$$S = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta \Rightarrow \sin \alpha = \frac{h_c}{b}, \sin \beta = \frac{h_c}{a}. \text{ Bundan əvvəlki məsələdə}$$

olduğu kimi əgər $a < h_c$ və ya $b < h_c$, ya da $a = b = h_c$ olarsa, məsələnin həlli yoxdur. Əgər

$b > h_c = a$ olarsa, onda $\beta = 90^\circ$, $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $a > h_c = b$ olarsa, onda $\alpha = 90^\circ$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

olar. Əgər $a = b > h_c$ olarsa, bu şərti ödəyən yeganə üçbucaq vardır və $c = 2\sqrt{a^2 - h_c^2}$. Onda bu

şərti ödəyən iki belə üçbucaq vardır. $\beta < 90^\circ$ olarsa, $c = \sqrt{b^2 - h_c^2} + \sqrt{a^2 - h_c^2}$, $\beta > 90^\circ$ olarsa,

$$c = \sqrt{b^2 - h_c^2} - \sqrt{a^2 - h_c^2}$$

10. Üçbucağın a, b tərəfləri və ℓ_c tən bölgəni verilmişdir. Üçbucağın c tərəfini və bucaqlarını tapın.

Həlli: c tərəfini tapmaq üçün $\ell_c = \frac{2ab \cos \frac{\gamma}{2}}{a+b}$ düsturundan istifadə edək. Buradan $\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b)\ell_c}{2ab}$.

Məsələnin yeganə həllinin olması üçün $\cos \frac{\gamma}{2} < 1 \Rightarrow \frac{(a+b)\ell_c}{2ab} < 1$ olmalıdır. Onda c tərəfini

kosinuslar teoremini tətbiq etməklə tapmaq olar. Həqiqətən də $\cos \gamma = 2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} - 1$

düsturunu kosinuslar teoremində nəzərə alsaq onda:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - 2ab(2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} - 1) = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \cos^2 \frac{\gamma}{2} = (a+b)^2 -$$

$$-\frac{(a+b)^2 \ell_c^2}{ab} = (a+b)^2 \left(1 - \frac{\ell_c^2}{ab}\right) \Rightarrow c = (a+b) \sqrt{1 - \frac{\ell_c^2}{ab}}$$

Bundan sonra $\triangle ABC$ -nin bucaqlarını məlum a, b və c tərəflərinə görə asanlıqla tapmaq olar.

11. $\triangle ABC$ -nin a, b tərəfləri və m_a medianı verilmişdir. Üçbucağın c tərəfini və bucaqlarını tapın.

Həlli: Üçbucağın c tərəfini tapmaq üçün $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$ düsturundan istifadə edək.

Tənliyi c -yə nəzərən həll etsək, $c = \sqrt{\frac{4m_a^2 + a^2 - 2b^2}{2}}$ alarıq.

$\triangle ABC$ -nin bucaqlarını isə məlum a, b və c tərəflərinə görə asanlıqla tapmaq olar. Məsələnin həllinin yeganə olması üçün tərəfləri $\frac{a}{2}, m_a$ və b olan üçbucaq mövcud olmalıdır. Həqiqətən də m_a medianı a tərəfini yarıya böldüyü üçün $\frac{a}{2}, m_a$ və b tərəfləri bir üçbucaq əmələ gətirir. Deməli bu parametrlər arasında üçbucaq bərabərsizliyi ödənilir.

12. $\triangle ABC$ -də a, b tərəfləri və m_c medianı verilmişdir. Üçbucağın c tərəfini və bucaqlarını tapın.

Həlli: Məlum $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$ bərabərliyini c -yə görə həll etsək, $c = \sqrt{4m_c^2 - 2a^2 - 2b^2}$ olar.

Üçbucağın bucaqlarını isə məlum a, b, c tərəflərinə görə tapmaq olar. Məsələnin həllinin yeganə olması üçün tərəfləri $a, b, 2m_c$ olan üçbucağın olması zəruridir. $\triangle ABC$ -ni $AEBC$ paraleloqramına qədər tamamlayaq Bu paraleloqram, tərəfləri a, b və $2m_c$ olan iki üçbucaqdan ibarətdir. Beləliklə belə $\triangle AEC$ mövcuddursa, $\triangle ABC$ də mövcuddur. $\triangle AEC$ -nin mövcud olması üçün isə onun tərəfləri üçbucaq bərabərsizliyini ödəməlidir.

13. $\triangle ABC$ -də a, b tərəfləri və üçbucağın S sahəsi verilmişdir. Üçbucağın c tərəfini və bucaqlarını tapın.

Həlli: Sahə düsturuna əsasən $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma \Rightarrow \sin \gamma = \frac{2S}{ab} \Rightarrow \gamma = \arcsin \frac{2S}{ab}$. Bu məsələ isə iki tərəfinə və onlar arasındakı bucağa görə üçbucağın həllinin tapılmasına gəlir.

14. $\triangle ABC$ -də xaricdən daxilə çəkilmiş çevrələrin r_a, r_b, r_c radiusları verilmişdir. Üçbucağın perimetrini, daxili bucaqlarını, daxilə və xaricə çəkilmiş çevrələrin r və R radiuslarını, üçbucağın S sahəsini və a, b, c tərəflərini tapın.

Həlli: Üçbucağın perimetrini $p = \sqrt{r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c}$ düsturuna əsasən təyin etmək, daxili

bucaqlarını isə $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r_a}{p}, \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{r_b}{p}, \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r_c}{p}$ düsturlarına əsasən tapmaq olar.

Daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu $r = \frac{r_a r_b r_c}{p^2}$ xaricə çəkilmiş çevrənin radiusu

$R = \frac{r_a + r_b + r_c - r}{4}$ düsturuna əsasən tapılır.

Üçbucağın tərəflərini tapmaq üçün sinuslar teoremindən istifadə etmək olar.

$$a = 2R \sin \alpha, b = 2R \sin \beta, c = 2R \sin \gamma. \text{ Burada } \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{r_a}{p}}{1 + \frac{r_a^2}{p^2}} = \frac{2r_a p}{p^2 + r_a^2}$$

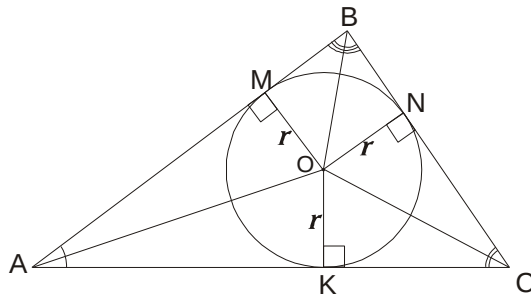
Uyğun qayda ilə $\beta = \frac{2r_b p}{p^2 + r_b^2}$, $\sin \gamma = \frac{2r_c p}{p^2 + r_c^2}$ almaq olar.

Onda üçbucağın tərəfləri üçün, $a = \frac{4pRr_a}{p^2 + r_a^2}$, $b = \frac{4pRr_b}{p^2 + r_b^2}$, $c = \frac{4pRr_c}{p^2 + r_c^2}$ düsturları alınar.

Onu da qeyd edək ki, üçbucağın tərəfləri məlum olduqdan sonra onun bütün qeyri əsas elementlərini də asanlıqla tapmaq olar.

Daxilə və çəkilmiş çevrələr

Çevrə üçbucağın bütün tərəflərinə toxunarsa ona üçbucaq daxilinə çəkilmiş çevrə deyilir. İstənilən üçbucağın daxilinə çevrə (r radiuslu) çəkmək mümkündür, bu çevrə yeganədir və onun mərkəzi üçbucağın tən bözlənlərinin kəsişmə nöqtəsidir.



$$OM = ON = OK = r$$

Tərif: Çevrə üçbucağın bütün tərəflərindən keçərsə, ona üçbucaq xaricinə çəkilmiş çevrə deyilir.

Teorem: İxtiyari üçbucağın (yarımperimetri – p olan) xaricinə çevrə (radiusu – R olan) çəkmək olar, bu çevrə yeganədir və onun mərkəzi üçbucağın tərəflərinin orta perpendikulyarlarının kəsişmə nöqtəsidir. $OA = OB = OC = R$

$$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} \quad R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Oxşar fiqurlar və onların xassələri

Tərif: Oxşar çevrilmə nəticəsində biri digərinə çevrilən fiqurlara oxşar fiqurlar deyilir. Fiqurların oxşarlığı “~” işarəsi ilə göstərilir. Məsələn, F və F' fiqurlarının oxşarlığı $F \sim F'$ kimi yazılır.

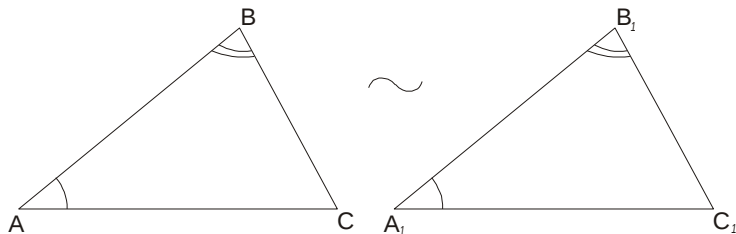
1. $F \sim F$ (refleksivlik)
2. $F \sim F' \Leftrightarrow F' \sim F$ (simmetriklik)
3. $F \sim F' \vee F' \sim F'' \Rightarrow F \sim F''$ (tranzitivlik)

Üçbucaqların oxşarlıq əlamətləri

Tərif: Uyğun bucaqları bərabər, uyğun xətti elementləri mütənasib olan üçbucaqlara oxşar üçbucaqlar deyilir.

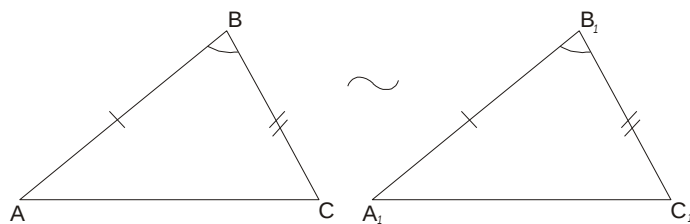
$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \text{ isə } \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1 \text{ və } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$

1-ci əlamət: Bir üçbucağın iki bucağı o biri üçbucağın iki bucağına bərabərdirsə, bu üçbucaqlar oxşardır.



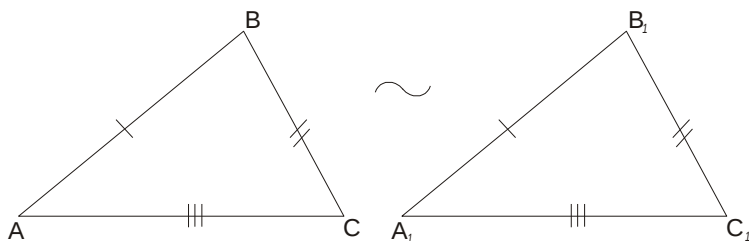
$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle A_1 \\ \angle B = \angle B_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

2-ci əlamət: Bir üçbucağın iki tərəfi o biri üçbucağın iki tərəfinə mütənasib və bu tərəflər arasındakı bucaqlar bərabərdirsə, belə üçbucaqlar oxşardır.



$$\left. \begin{array}{l} \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \\ \angle B = \angle B_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

3-cü əlamət: Bir üçbucağın üç tərəfi o biri üçbucağın üç tərəfi ilə mütənasibdirsə, belə üçbucaqlar oxşardır.



$$\left. \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

Nəticə:

1. Bərabərtərəfli üçbucaqlar oxşardır.
2. İki bucaqlardan biri bərabər olan düzbucaqlı üçbucaqlar oxşardır.

3. Bucaqlardan biri bərabər olan bərabəryanlı üçbucaqlar oxşardır.
4. Katetləri mütənasib olan düzbucaqlı üçbucaqlar oxşardır.

Oxşar fiqurların perimetrləri və sahələri nisbəti

Tərif: Uyğun bucaqları bərabər və tərəfləri mütənasib olan eyniadlı fiqurlara oxşar fiqurlar deyilir.

Teorem: Oxşar fiqurların perimetrləri nisbəti onların uyğun xətti ölçülərinin nisbətinə bərabərdir. Başqa sözlə, oxşarlıq əmsalı k , perimetrləri P_1, P_2 olan F_1 və F_2 oxşar fiqurlarının uyğun tərəfləri $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ və $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ olarsa, onda

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{P_1}{P_2} = k.$$

Teorem: Oxşar fiqurların sahələri nisbəti onların xətti ölçülərinin kvadrları nisbətinə bərabərdir.

Başqa sözlə, n sayda tərəfi olan F_1 və F_2 fiqurların sahələri S_1 və S_2 olarsa onda

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{a_m}{b_m} \right)^2 = k^2, \quad m = \overline{1; n}$$

Xassələr

1. Oxşar üçbucaqlarda ($\triangle ABC \sim \triangle DEF$):

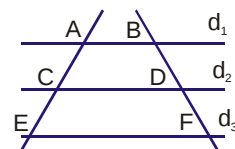
$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E, \quad \angle C = \angle F$$

$$\frac{c}{f} = \frac{b}{e} = \frac{a}{d} = \frac{h_a}{h_d} = \frac{m_a}{m_d} = \frac{l_a}{l_d} = \frac{R}{R_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{P_{(ABC)}}{P_{(DEF)}} = k \quad \text{və} \quad \frac{S_{(ABC)}}{S_{(DEF)}} = k^2$$

2. Fales teoremi. $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$ olarsa, onda:

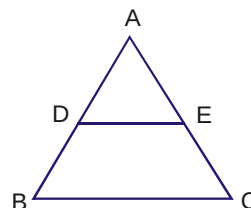
$$\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BD}{BF}$$



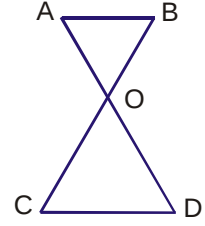
3. $DE \parallel BC$ olarsa, onda:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}; \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



4. $AB \parallel CD$ olarsa, onda:

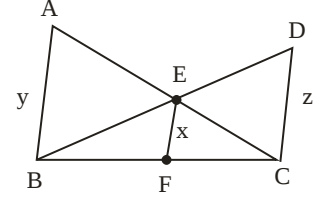
$$\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{CD}$$



5. $AB \parallel EF \parallel DC$ olarsa, onda:

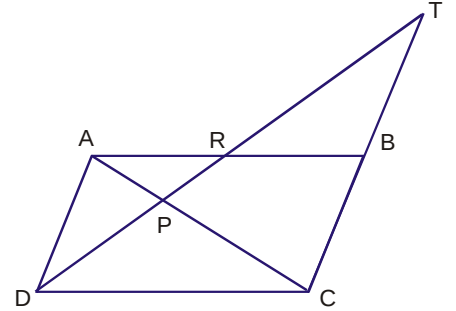
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

$$\frac{y}{BF} = \frac{z}{FC}$$



6. $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$ olarsa, onda:

$$DP^2 = PR \cdot PT$$

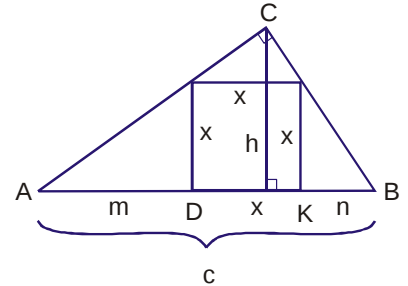


7. Düzbucaqlı üçbucağın daxilinə bir tərəfi hipotenuz üzərində yerləşən və tərəflərinin uzunluğu x olan kvadrat çəkilmişdir.

$AB = c$, $CH = h$, $AD = m$, $BK = n$ olarsa, onda:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{c} + \frac{1}{h}$$

$$x^2 = m \cdot n$$

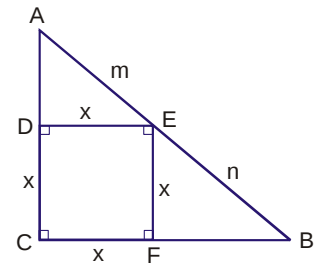


8. Katetləri a və b olan düzbucaqlı üçbucağın daxilinə bir tərəfi düz bucaq tərəfi ilə üst-üstə düşən x tərəfli kvadrat çəkilmişdir.

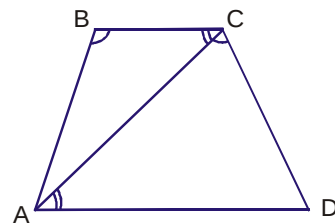
$AC = b$, $BC = a$, $AE = m$, $BE = n$ olarsa, onda:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$m = \frac{bc}{a+b}, \quad n = \frac{ac}{a+b}$$

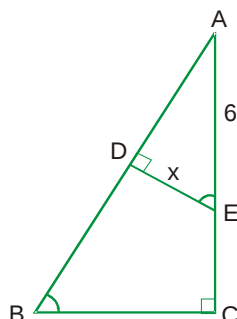


9. $BC \parallel AD$, $\angle B = \angle ACD$ olarsa,
 $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ və $AC^2 = BC \cdot AD$



NÜMUNƏLƏR:

1. $\triangle ABC$ -də $BC=6$, $\angle C = 90^\circ$, $\triangle ADE$ -də $\angle D = 90^\circ$ isə şəkildə verilənlərə görə x nəyə bərabərdir?



- A) 1,5 B) 2,4 C) 3,6 D) 4,1 E) 5,2

Həlli:

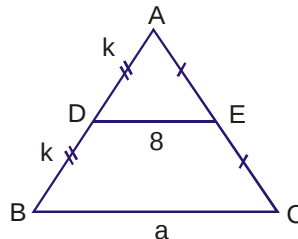
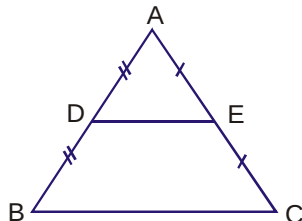
$\triangle ABC$ -də $AB^2 = 8^2 + 6^2$, $AB = 10$.

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$, çünki, $\angle C = \angle D$, $\angle A$ – ortaq $\Rightarrow \angle E = \angle B$ -dir.

$$\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 3,6$$

Cavab: C

2. Şəkildə $DE \parallel BC$, $AD=DB$, $AE=EC$, $DE=8$ sm



Həlli:

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$

$$\frac{k}{2k} = \frac{8}{a} \qquad \frac{1}{2} = \frac{8}{a}$$

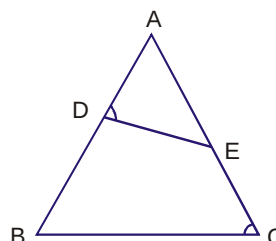
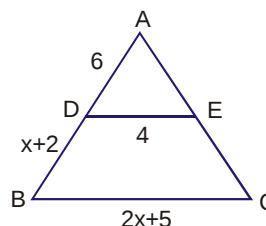
$a=16$

3. Şəkildə $DE \parallel BC$, $x=?$

Həlli:

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$

$$\frac{6}{x+2+6} = \frac{4}{2x+5}$$



$$\frac{6}{x+8} = \frac{4}{2x+5}$$

$$12x+30=4x+32$$

$$8x=2$$

$$x = \frac{1}{4}$$

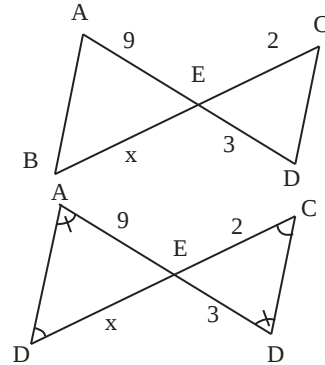
4. Şəkində $AB \parallel DC$ isə $x=?$

Həlli:

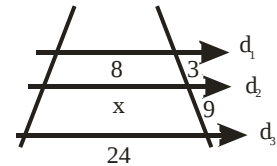
$$\triangle ABE \sim \triangle CDE$$

$$\frac{x}{2} = \frac{9}{3}$$

$$x=6 \text{ sm}$$



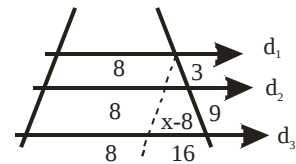
5. Şəkində $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$, $x=?$



Həlli:

$$\text{Üçbucaqların oxşarlığına görə} \Rightarrow \frac{3}{3+9} = \frac{x-8}{16} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{x-8}{16}$$

$$x=12 \text{ sm}$$



6. Şəkində $\angle ADE = \angle C$, $AD=8$, $BD=7$, $AE=5$, $CE=x=?$

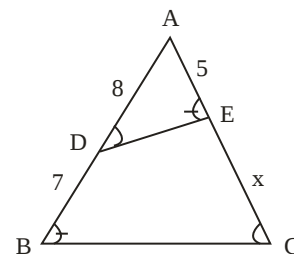
Həlli:

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} \quad \frac{5}{15} = \frac{8}{5+x} \quad \frac{1}{3} = \frac{8}{5+x}$$

$$24=x+5$$

$$x=19 \text{ sm}$$



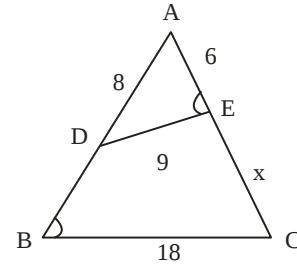
7. Şəkildə $\angle AED = \angle ABC$, $x = ?$

Həlli:

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

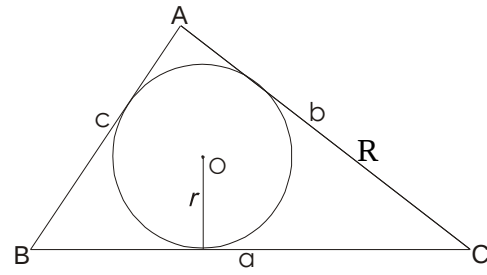
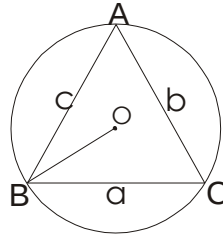
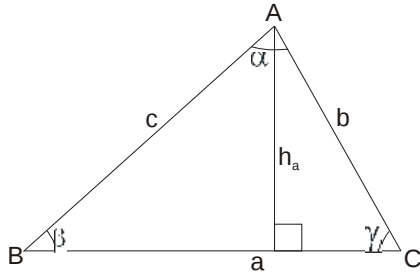
$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{9}{18} = \frac{8}{x+6} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{8}{x+6}$$

$$x = 10 \text{ sm}$$



Üçbucağın sahəsi

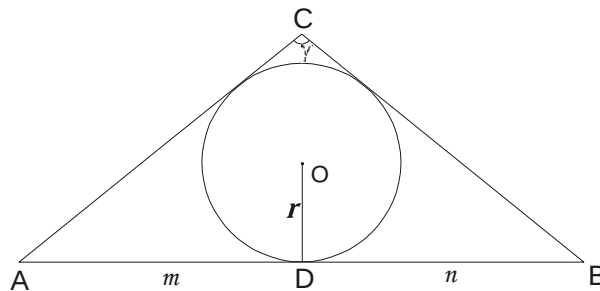
Tutaq ki, a, b, c – üçbucağın tərəfləri, S – üçbucağın sahəsi, h_a, h_b, h_c – uyğun hündürlüklər, α, β, γ – daxili bucaqlar, $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ – yarımperimetr R və r – uyğun olaraq xaricə və daxilə çəkilmiş çevrələrin radiusudur.



Onda

1. $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$
2. $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}ac \sin \beta = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$
3. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
4. $S = \frac{abc}{4R}$
5. $S = pr$

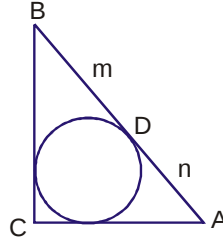
Teorem: Daxilinə çevrə çəkilmiş üçbucağın sahəsi, hər hansı bir tərəfin toxunma nöqtəsi ilə bölündüyü hissələrin hasilinə ilə bu tərəfin qarşısındakı bucağın yarısının kotangensi hasilinə bərabərdir.



$\triangle ABC$ -də AB tərəfinin bölündüyü hissələr m və n , bu tərəfin qarşısındakı bucaq γ olarsa, onda

$$S = m \cdot n \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$$

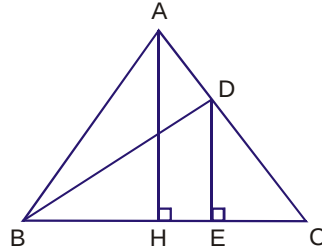
Nəticə: düzbucaqlı üçbucağın sahəsi daxilə çəkilmiş çevrənin hipotenuzu böldüyü hissələrin uzunluqları hasilinə bərabərdir.



$$S = m \cdot n$$

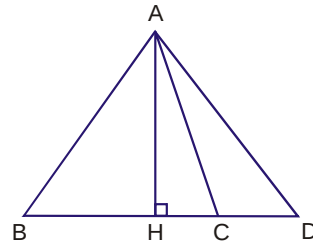
Teorem: Oturacaqları bərabər olan üçbucaqların sahələri nisbəti oturacaqlara çəkilmiş uyğun hündürlüklərin nisbətinə bərabərdir.

$$\frac{S_{(ABC)}}{S_{(DBC)}} = \frac{AH}{DE}$$



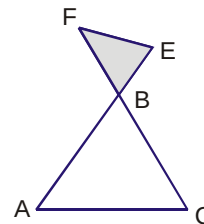
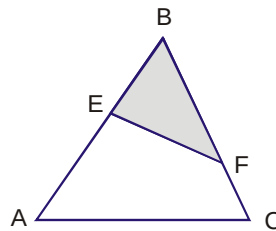
Teorem: Hündürlükləri bərabər olan iki üçbucağın sahələri nisbəti onların uyğun oturacaqları nisbətinə bərabərdir.

$$\frac{S_{(ABC)}}{S_{(ACD)}} = \frac{BD}{CD}$$

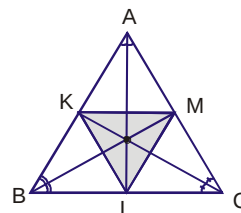


10. Bir bucaqları bərabər olan üçbucaqların sahələri nisbəti bu bucaqları əmələ gətirən uyğun tərəflərin hasilləri nisbətinə bərabərdir, yəni

$$\frac{S_{(BEF)}}{S_{(ABC)}} = \frac{BE \cdot BF}{AB \cdot BC}$$

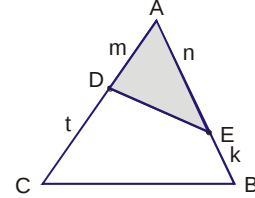


11. $\triangle ABC$ -də AL , BM , CK tənbönlər isə, onda



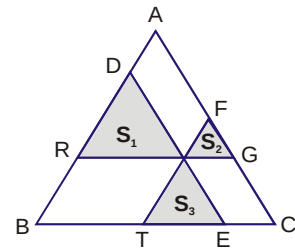
$$\frac{S_{(KLM)}}{S_{(ABC)}} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}$$

$$12. \frac{S_{(ADE)}}{S_{(ABC)}} = \frac{m \cdot n}{(m+t)(n+k)}$$

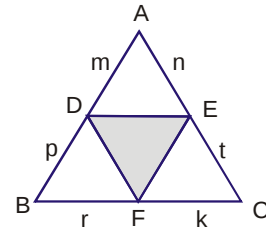


13. $TF \parallel AB$, $RG \parallel BC$, $DE \parallel AC$

$$S_{(ABC)} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$$



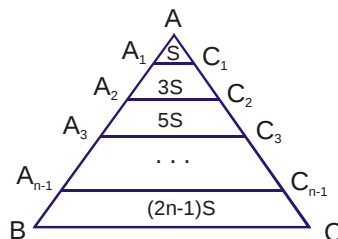
$$14. \frac{S_{(DEF)}}{S_{(ABC)}} = \frac{r \cdot t \cdot m + k \cdot n \cdot p}{a \cdot b \cdot c}$$



15. $\triangle ABC$ –nin bir tərəfi və ona bitişik iki bucağı verilərsə, üçbucağın sahəsi

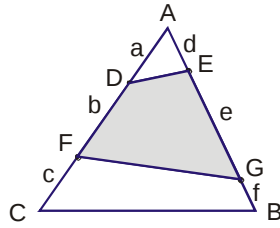
$$S = \frac{a^2 \sin \beta \sin \angle C}{2 \sin \alpha} = \frac{b^2 \sin \alpha \sin \angle C}{2 \sin \beta} = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \angle C}$$

16. İxtiyari üçbucağın hər hansı tərəfini bərabər hissələrə bölüb, bölgü nöqtələrindən oturacağa paralel xətt parçaları çəksək, təpə nöqtəsindən başlayaraq alınan sahələrin nisbəti tək ədədlərin nisbəti kimi olar:



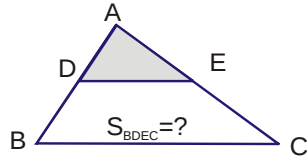
17. $\triangle ABC$ -də şəkildəki kimi $AB = a+b+c$, $AC = d+e+f$ olarsa, onda:

$$\frac{S_{(DFGE)}}{S_{(ABC)}} = \frac{ae + bd + be}{(a+b+c)(d+e+f)}$$



NÜMUNƏLƏR:

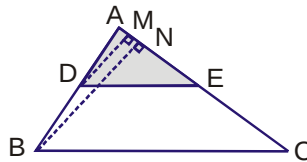
1. Şəkildə $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{4}$, $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}$ və $S_{ADE}=7$ isə S_{BDEC} nəyə bərabərdir?
 A) 14 B) 21 C) 28 D) 35 E) 42



Həlli:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BN, S_{ADE} = \frac{1}{2} AE \cdot DM, \frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{AC \cdot BN}{AE \cdot DM} = \frac{3}{2} \cdot \frac{BN}{DM}$$

$$\triangle ABN \sim \triangle AMD \Rightarrow \frac{BN}{DM} = \frac{AB}{AD} = \frac{4}{1}$$



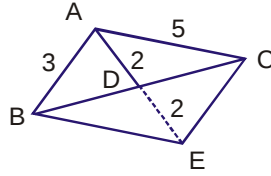
$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{BN}{DM} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{1} = \frac{6}{1} \Rightarrow \frac{S_{ABC} - S_{ADE}}{S_{ADE}} = \frac{6-1}{1} \Rightarrow \frac{S_{BDEC}}{S_{ADE}} = 5$$

$$S_{BDEC} = 5 \cdot 7 = 35$$

Cavab: D

2. Üçbucağın iki tərəfi 3 sm, 5 sm və üçüncü tərəfə çəkilmiş medianı 2 sm-dir. Onun sahəsini tapın:

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6



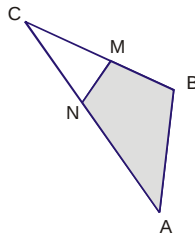
Həlli:

AD medianını özü qədər uzadaq. Alınan dördbucaqlı paraleloqramdır. $S_{ABC} = S_{ABE}$. Tərəfləri 3, 4 və 5 olduğu üçün düzbucaqlı üçbucaqdır. Deməli

$$S_{ABC} = S_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ sm}^2$$

Cavab: E

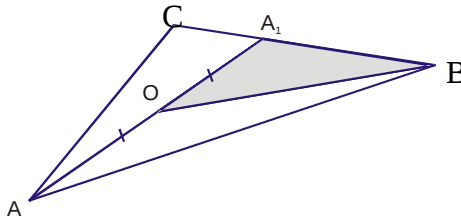
3. Şəkində $CM = 2MB$; $CN = NA$; $S_{ABC} = S$. S_{MBAN} -i tapın.



Həlli:

$$\frac{S_{CMN}}{S_{ABC}} = \frac{CM \cdot CN}{CB \cdot CA} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{CMN} = \frac{1}{3}S \Rightarrow S_{MBAN} = S_{ABC} - S_{CMN} = S - \frac{1}{3}S = \frac{2}{3}S$$

4. Şəkində $3CA_1 = A_1B$; $AO = OA_1$; $S_{ABC} = S$. S_{OBA_1} -i tapın.



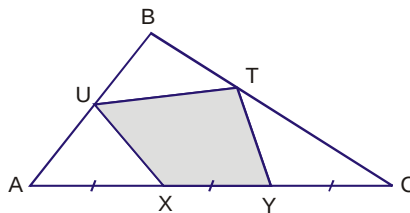
Həlli:

$\triangle ABA_1$ və $\triangle ABC$ –də A təpəsindən çəkilmiş hündürlükləri eynidir. Onda

$$\frac{S_{ABA_1}}{S_{ABC}} = \frac{A_1B}{CB} = \frac{3}{4} \Rightarrow S_{ABA_1} = \frac{3}{4}S.$$

BO parçası $\triangle ABA_1$ -in medianı olduğundan, $S_{OBA_1} = \frac{3}{8}S$ olar.

5. Şəkində $AU = \frac{1}{2}BU$; $BT = \frac{1}{2}CT$; $AX = XY = YC$; $S_{ABC} = S$. S_{XUTY} -i tapın.



Həlli:

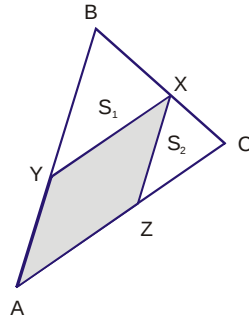
$$S_{ATB} = \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{3} S \text{ (ümumi hündürlük)}$$

$$S_{BTU} = \frac{2}{3} S_{ABT} = \frac{2}{9} S \text{ (ümumi hündürlük)}$$

$$\text{Uyğun olaraq, } S_{TYC} = \frac{2}{9} S;$$

$$S_{AXU} = \frac{1}{9} S \Rightarrow S_{XUTY} = \frac{4}{9} S.$$

6. Şəkində $YX \parallel AC$; $XZ \parallel AB$; $S_{BXY} = S_1$; $S_{CXZ} = S_2$. S_{AYXZ} -i tapın.



Həlli:

$$\triangle XYB \sim \triangle CZX \Rightarrow \frac{CZ}{XY} = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}$$

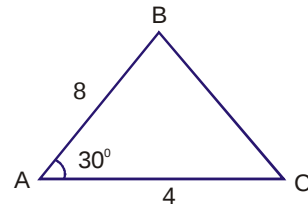
$$S_{AYXZ} = 2 \cdot S_{AXZ} = 2 \cdot \frac{AZ}{ZC} \cdot S_{CXZ} = 2 \cdot \frac{XY}{CZ} \cdot S_2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} \cdot S_2 = 2\sqrt{S_1 S_2}$$

7. Şəkindəki $AB=8$, $BC=4$ və $\angle B=30^\circ$ isə $S_{ABC}=?$

Həlli:

$$S_{ABC} = \frac{8 \cdot 4 \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{8 \cdot 4 \cdot \sin 30}{2} = 8 \text{ sm}^2$$

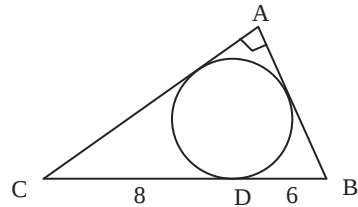
$$S_{ABC} = 8 \text{ sm}^2$$



8. Şəkində $A=90^\circ$, $BD=6$, $DC=8$ sm olarsa, $S_{ABC}=?$

Həlli:

$$S_{ABC} = BD \cdot DC = 6 \cdot 8 = 48 \text{ sm}^2$$



Üçbucaqla əlaqədar bəzi teoremlər

Tutaq ki, ΔABC -nin tərəfləri a, b, c uyğun bucaqlar α, β, γ -dır. Onda aşağıdakı düsturlar doğrudur:

$$1. a = b \cos \gamma + c \cos \beta$$

$$b = a \cos \gamma + c \cos \alpha$$

$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha$$

$$2. \frac{a^2 - c^2}{c} = a \cos \beta - b \cos \alpha$$

$$\frac{b^2 - c^2}{a} = b \cos \gamma - c \cos \beta$$

$$\frac{c^2 - a^2}{b} = c \cos \gamma - a \cos \beta$$

$$3. \frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \gamma}$$

$$\frac{a^2 - c^2}{b^2} = \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\sin \beta}$$

$$\frac{b^2 - c^2}{a^2} = \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin \alpha}$$

4. Tixo de Braqedüsturu:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \sin \gamma}{b - a \cos \gamma}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b \sin \alpha}{c - b \cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{c \sin \beta}{a - c \cos \beta}$$

5. Rejomontan düsturu (tahgenslər teoremi):

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}$$

$$\frac{a - c}{a + c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \gamma}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}$$

6. Molveydə düsturu:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \quad \text{və ya} \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}$$

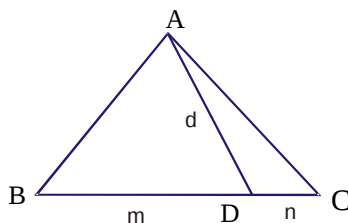
$$\frac{a+c}{b} = \frac{\cos \frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \quad \frac{a-c}{b} = \frac{\sin \frac{\alpha-\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad \frac{b-c}{a} = \frac{\sin \frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

7. Stüart teoremi

$\triangle ABC$ –də $AD=d$ düz xətti BC tərəfini $BD=m$ və $CD=n$ parçalarına bölsə, onda:

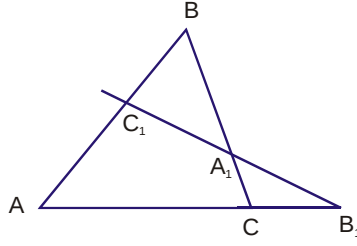
$$d^2 = \frac{b^2 m + c^2 n}{m+n} - mn$$



8. Menelay teoremi

$\triangle ABC$ -nin tərəflərini kəsən d düz xətti AB tərəfini C_1 , BC tərəfini A_1 , AC tərəfinin uzantısını B_1 nöqtəsində kəsərsə, onda:

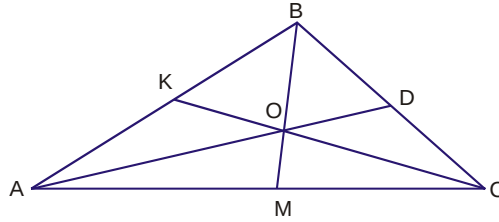
$$\frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} = 1$$



9.Çeva teoremi

$\triangle ABC$ –də AD , BM , CK düz xətt parçaları bir nöqtədə kəsişirlərsə, onda:

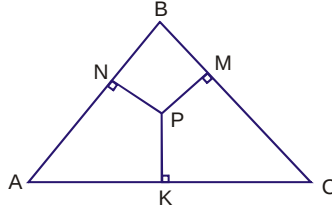
$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AK}{KB} = 1$$



10.Çarnot teoremi

$\triangle ABC$ –də P nöqtəsi üçbucaq daxilində olan ixtiyari nöqtə və $PM \perp BC$, $PN \perp AB$, $PK \perp AC$ olarsa, onda:

$$AK^2 + CM^2 + BN^2 = KC^2 + MB^2 + NA^2$$



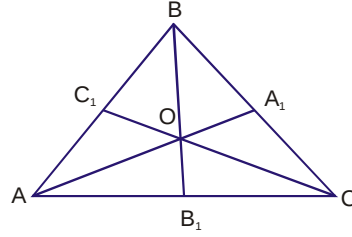
11.Van Obel və Jergon teoremləri

$\triangle ABC$ -nin BC , AC , AB tərəfləri üzərində A_1 , B_1 , C_1 nöqtələri elə götürülmüşdür ki, AA_1 , BB_1 , CC_1 düz xətt parçaları O nöqtəsində kəsişirlər.

Onda:

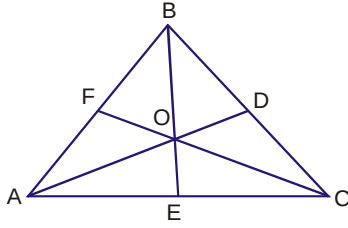
$$1) \frac{CB_1}{B_1A} + \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{CO}{OC_1} \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AO}{OA_1} \frac{BC_1}{C_1A} + \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BO}{OB_1}$$

$$2) \frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1} = 1 \quad \frac{AO}{AA_1} + \frac{BO}{BB_1} + \frac{CO}{CC_1} = 2$$



12. Üçbucaqda mütənasib parçalar haqqında teoremlər

$\triangle ABC$ -də A və B təpə nöqtələrindən BC və AC tərəflərinə AD və BE parçaları çəkilmişdir. Bu parçalar O nöqtəsində kəsişir və bu nöqtə ilə



$$\frac{BO}{OE} = \frac{mp - nq}{n(p + q)} \frac{AE}{EC} = \frac{mp - nq}{q(m + n)}$$

13. $\triangle ABC$ -də A və B nöqtələrindən BC və AC tərəflərinə AD və BE parçaları çəkilmişdir. Bu parçalar O nöqtəsində kəsişirlər.

$$\frac{BO}{DC} = \frac{m}{n} \frac{AO}{OE} = \frac{p}{q} \text{ olarsa, onda:}$$

$$\frac{BO}{OE} = \frac{m}{n} \left(1 + \frac{p}{q}\right)$$

$$\frac{AO}{OD} = \frac{p}{q} \left(1 + \frac{m}{n}\right)$$

14. $\triangle ABC$ -də A, B və C nöqtələrindən BC, AC və AB tərəflərinə AD, BE və CF parçaları çəkilmişdir. Bu parçalar O nöqtəsində kəsişirlər.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n} \frac{AE}{EC} = \frac{p}{q} \text{ olarsa, onda:}$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p}$$

3. ÇOXBUCAQLILAR

Sınıq xətt. Qapalı sınıq xətt

Tərif: Ardıcıl götürülmüş ixtiyari üçü bir düz xəttə üzərində olmayan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ nöqtələrini birləşdirən $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{n-1} A_n$ düz xətt parçalarının əmələ gətirdiyi figura $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ sınıq xətt deyilir.

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ sınıq xəttin təpələri, $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{n-1} A_n$ düz xətt parçalarına isə tərəfləri deyilir.

Tərif: Tərəfləri kəsişməyən sınıq xəttə sadə, tərəfləri kəsişən sınıq xəttə isə mürəkkəb sınıq xətt deyilir.

Tərif: Başlanğıc və son təpə nöqtələri üst-üstə düşən sınıq xəttə qapalı sınıq xətt deyilir.

Çoxbucaqlı. Qabarıq çoxbucaqlı

Tərif: Sadə qapalı sınıq xəttə çoxbucaqlı deyilir.

Qapalı sınıq xəttin $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{n-1} A_n$ tərəflərinə çoxbucaqlının tərəfləri, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ təpə nöqtələrinə isə bu çoxbucaqlının təpə nöqtələri deyilir.

Çoxbucaqlının qonşu tərəflərinin əmələ gətirdiyi bucaqlara çoxbucaqlının bucaqları deyilir. Bucaqlarının sayı n olan çoxbucaqlıya n – bucaqlı deyilir. Çoxbucaqlının bir tərəfi üzərində yerləşən təpə nöqtələri qonşu təpə nöqtələri adlanır. Çoxbucaqlının qonşu olmayan iki təpə nöqtəsini birləşdirən düz xətt parçasına çoxbucaqlının diaqonalı deyilir.

Qabarıq çoxbucaqlı

Tərif: Çoxbucaqlı hər bir tərəfinin yerləşdiyi düz xətdən bir tərəfdə yerləşirsə, belə çoxbucaqlıya qabarıq çoxbucaqlı deyilir.

Qabarıq çoxbucaqlının xassələri

Teorem: Qabarıq n bucağının daxili bucaqlarının cəmi $180^\circ(n-2)$ – dir.

Teorem: Hər təpədə bir xarici bucaq götürməklə, qabarıq n -bucaqlının xarici bucaqlarının cəmi 360° -dir.

Teorem: Çevrə xaricinə çəkilmiş çoxbucaqlının sahəsi $S = pr$ -dir, burada p -yarımperimetr, r – daxilə çəkilmiş çevrənin radiusudur.

Teorem: Qabarıq n bucaqlının diaqonallarının sayı $\frac{n(n-3)}{2}$ -dir.

Düzgün çoxbucaqlının daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələr və onların radiuslarını hesablamaq üçün düsturlar

İxtiyari düzgün çoxbucaqlının daxilinə və xaricinə çevrə çəkmək olar. Bu çevrələrin mərkəzləri üst-üstə düşür və düzgün çoxbucaqlının mərkəzi adlanır.

Tərəfi a_n olan düzgün n bucaqlının daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiusları uyğun olaraq aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$1. r = \frac{a_n}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$$

$$2. R = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$$

Burada R -xaricə çəkilmiş çevrənin radiusu, r -daxilə çəkilmiş çevrənin radiusudur.

Xüsusi hallar:

1. Bərabərtərəfli üçbucaq:

$$n = 3 \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{6}, R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

2. Kvadrat:

$$n = 4 \Rightarrow r = \frac{a}{2}, R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

3. Düzgün altıbucaqlı:

$$n = 6 \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{2}, R = a$$

NÜMUNƏLƏR:

1. Tərəflərin sayı 5 olan çoxbucaqlının daxili bucaqlarının cəmini tapın.

A) 640 B) 540 C) 720 D) 600 E) 360

Həlli:

Daxili bucaqlarının cəmi

$$(n-2) \cdot 180 = (5-2) \cdot 180 = 540^\circ$$

Cavab: B

2. Tərəflərinin sayı 6 olan çoxbucaqlının diaqonallarının sayını tapın.

A) 10 B) 8 C) 9 D) 7 E) 6

Həlli:

$$\text{Diaqonalların sayı } \frac{n(n-3)}{2} = \frac{6(6-3)}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$$

Cavab: C

3. Diaqonallarının sayı tərəflərinin sayından 4 dəfə çox olan çoxbucaqlının daxili bucaqlarının cəmini tapın.

Həlli:

$$\text{Tərəflərin sayı } n \text{ olsun. Onda } \frac{n(n-3)}{2} = 4n$$

$$n-3=8; n=11$$

Daxili bucaqlarının cəmi

$$(n-2)180=(11-2)180=9 \cdot 180 = 1620^\circ$$

Cavab: D

4. Daxili bucaqlarının cəmi xarici bucaqların cəmindən 5 dəfə çox olan çoxbucaqlının

tərəflərinin sayını tapın.

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Həlli: $(n-2) 180 = 5 \cdot 360$

$$n-2=10$$

$$n=12$$

5. Daxili bucaqlarının cəmi 1260^0 olan çoxbucaqlı neçə tərəflidir?

- A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Həlli: $(n-2) 180 = 1260$

$$n-2=7$$

$$n=9$$

Cavab: C

6. Bir xarici bucağı 30^0 olan düzgün çoxbucaqlının tərəflərinin sayını tapın.

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Həlli:

Xarici bucağı α ilə işarə etsək, onda

$$\alpha = \frac{360}{n} = 30$$

$$360 = 30n$$

$$n=12$$

Cavab: E

7. Xarici bucağı 20^0 olan düzgün çoxbucaqlının tərəflərinin sayını tapın.

- A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

Həlli:

Xarici bucağı α ilə işarə etsək, $\alpha = \frac{360}{n} = 20$

$$360 = 20n$$

$$n=18^0$$

Cavab: E

8. Diaqonallarının sayı tərəflərinin sayına bərabər olan çoxbucaqlının daxili bucaqlarının cəmini tapın.

- A) 340 B) 540 C) 440 D) 640 E) 620

Həlli: $\frac{n(n-3)}{2} = n$

$$n(n-3)=2n$$

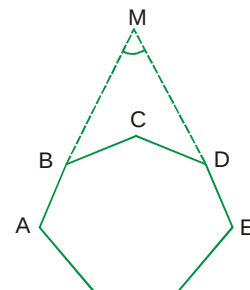
$$n=5$$

$$\text{daxili bucaqların cəmi } (n-2)180 = (5-2) 180 = 540^0$$

Cavab: B

9. $\angle ABCDE \dots$ bir düzgün çoxbucaqlı, $\angle M = 72^0$ -dir.

Çoxbucaqlının neçə tərəfi var?



A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

Həlli:

Düzgün çoxbucaqlı olduğu üçün onun xarici bucaqları $\angle MBC = \angle NCD = \angle NDC = x$ olsun. Onda $\angle MNB = 2x$ olar. $\triangle MNB$ -də

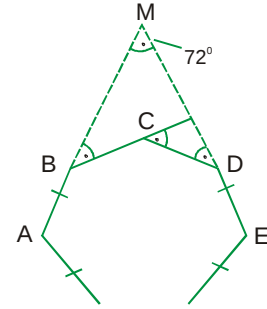
$$x + 2x + 72^\circ = 180^\circ$$

$$3x = 108^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$$

n -bucaqlının xarici bucağı $360^\circ/n$ -dir.

Buradan,

$$\frac{360^\circ}{n} = 36^\circ \Rightarrow n = 10 \text{ alınar.}$$



Cavab: D

DÖRDBUCAQLILAR

Tərif: Dörd bucağı olan çoxbucaqlıya dördbucaqlı deyilir.

Çoxbucaqlılar üçün söylənilən təkliflər dördbucaqlılar üçün də doğrudur

Xassələri:

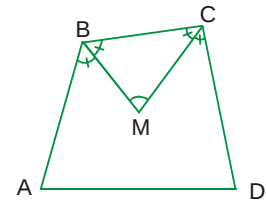
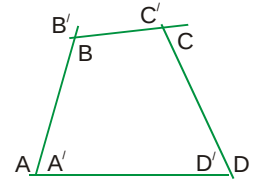
1. $A' + B' + C' + D' = 360^\circ$

2. $A + B + C + D = 360^\circ$

3. $A + A' = 180^\circ$

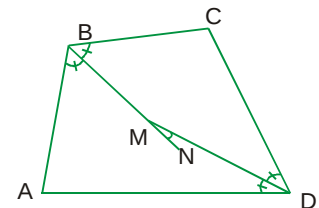
4. BM və CM tən bölən isə

$$\angle BMC = \frac{\angle A + \angle D}{2} \text{ olar.}$$



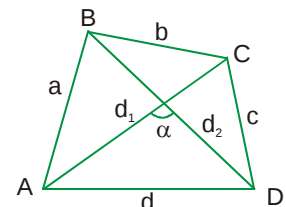
5. BM və DM-tən bölən isə

$$\angle NMD = \frac{|\angle A - \angle C|}{2} \text{ olar.}$$



6. $AB + BC + CD + DA = 2p$ isə $p < d_1 + d_2 < 2p$

$$d_1 \perp d_2 \text{ isə } a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$



$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$$

7. Dördbucaqlıların sahələri üçün düsturlar.

Tərəfləri a, b, c, d , qarşı bucaqları α və β olan ixtiyari qabarıq dördbucaqlının sahəsi

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd} \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$p = \frac{a+b+c+d}{2}$$

Xüsusi halda, dördbucaqlının daxilinə çevrə çəkmək mümkün olduqda (yəni $a+c=b+d$ olarsa):

$$S = \sqrt{abcd} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Dördbucaqlının xaricinə çevrə çəkmək mümkün olduqda

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

İki qarşı tərəfi bir-birinə paralel və bərabər olan dördbucaqlıya paraleloqram deyilir. ABCD - paraleloqramdır.

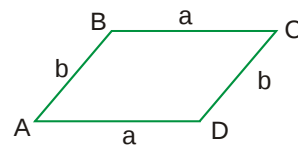
Xassələri:

1. $AB \parallel CD$, $AB=DC$

$AD \parallel BC$, $AD=BC$

$\angle A = \angle C$, $\angle D = \angle B$

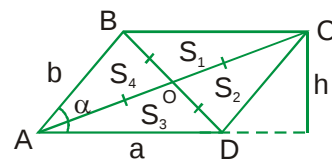
$\angle A + \angle D = 180^\circ$



2. Paraleloqramın diaqonalları bir nöqtədə

kəsişir və a) $AO=OC$

b) $BO=OD$ olur



Sahə düsturları:

$$S = ah$$

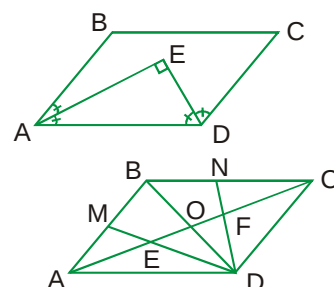
$$S = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4$$

3. AE, DE-tənbölən isə $\angle E = 90^\circ$ -dir

4. M nöqtəsi AB-nin, N nöqtəsi BC-nin orta nöqtəsi isə

$$AE = EF = FC = \frac{1}{3} AC$$



$$EO=OF=\frac{1}{6}AC$$

doğrudur

5. M nöqtəsi BC-nin, N nöqtəsi AD-nin orta nöqtəsi isə

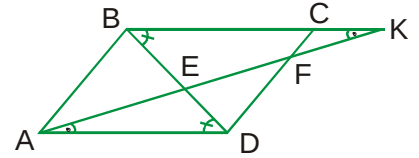
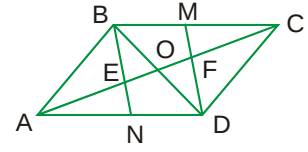
$$AE=EF=FC=\frac{1}{3}AC$$

$$EO=OF=\frac{1}{6}AC \text{ doğrudur}$$

6. $\triangle AED \sim \triangle BKE$

$$\triangle ABE \sim \triangle DEF$$

$$AE^2 = EF \cdot FK \text{ doğrudur}$$



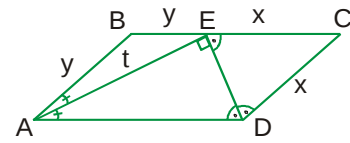
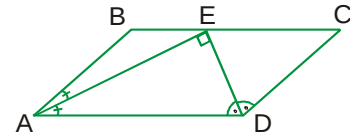
NÜMUNƏLƏR:

1. Şəkindəki AE-təbölən, $AE \perp ED$, $AD=12$ isə ABCD-paraleloqramının perimetrini tapın.

A) 24 B) 28 C) 36 D) 48 E) 60

Həlli:

$AE \perp ED$ yəni $\angle AED = 90^\circ$ olduğu üçün ED tən böləndir. Şəkindən görüldüyü kimi $x+y=12$ -dir. $P_{\text{par}} = 3(x+y) = 36$



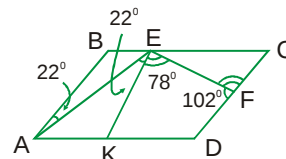
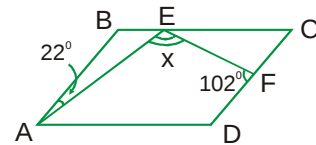
Cavab: C

2. Şəkində ABCD paraleloqramdır. $\angle BAE = 22^\circ$ $\angle DFE = 102^\circ$ isə $\angle AEF$ neçə dərəcədir?

A) 80 B) 90 C) 100 D) 114 E) 124

Həlli:

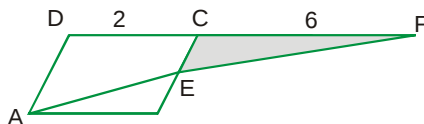
$EK \parallel AB$ çəkək
 $\angle KEF = \angle CFE = 78^\circ$
 $\angle AEK = 22^\circ$



$$\angle AEF = 78^0 + 22^0 = 100^0$$

Cavab: C

3. ABCD – paraleloqramdır. DC=2, CF = 6, $S_{CEF}=27$ isə $S_{ABCD}=?$



- A) 12 B) 24 C) 30 D) 36 E) 48

Həlli:

$$AB=DC=2$$

$$\triangle FCE - \triangle ABE \Rightarrow \frac{27}{S_{ABE}} = \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$\frac{27}{S_{ABE}} = 9 \Rightarrow S_{ABE} = 3$$

$$\triangle FCE - \triangle FDA \Rightarrow \frac{27}{S_{FDA}} = \frac{9}{16}$$

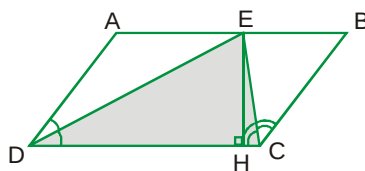
$$\Rightarrow S_{FDA} = 48$$

$$S_{AECD} = 48 - 27 = 21$$

$$S_{ABCD} = 3 + 21 = 24$$

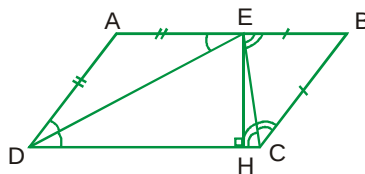
Cavab: B

4. ABCD – paraleloqram, DE və CE tən böləndir. BC=5 sm, HC=2, $EH \perp DC$ isə $S_{DEC}=?$



- A) 10 B) 15 C) 18 D) 20 E) 24

Həlli:



$$\angle DEC = 90^0, DC = 10, DH = 10 - 2 = 8$$

$$EH = \sqrt{DH \cdot HC} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$$

$$S_{DEC} = \frac{1}{2} DC \cdot EH = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20, S_{DEC} = 20$$

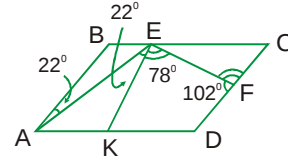
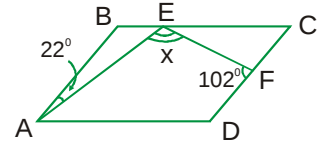
Cavab: D

5. Şəkində ABCD paraleloqramdır. $\angle BAE=22^0$
 $\angle DFE=102^0$ isə $\angle AEF=$ neçə dərəcədir?

A) 80 B) 90 C) 100 D) 114 E) 124

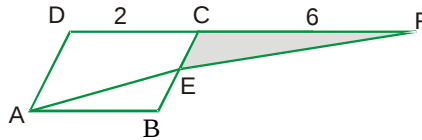
Həlli:

$$\begin{aligned} EK // AB \text{ çəkək} \\ \angle KEF = \angle CFE = 78^0 \\ \angle AEK = 22^0 \\ \angle AEF = 78^0 + 22^0 = 100^0 \end{aligned}$$



Cavab: C

3. ABCD – paraleloqramdır. $DC=2$, $CF=6$, $S_{CEF}=27$ isə $S_{ABCD}=?$



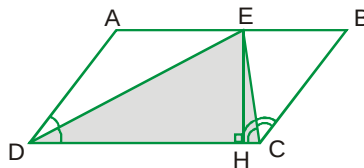
A) 12 B) 24 C) 30 D) 36 E) 48

Həlli:

$$\begin{aligned} AB &= DC = 2 \\ \triangle FCE - \triangle ABE &\Rightarrow \frac{27}{S_{ABE}} = \left(\frac{6}{2}\right)^2 \\ \frac{27}{S_{ABE}} &= 9 \Rightarrow S_{ABE} = 3 \\ \triangle FCE - \triangle FDA &\Rightarrow \frac{27}{S_{FDA}} = \frac{9}{16} \\ \Rightarrow S_{FDA} &= 48 \\ S_{AECD} &= 48 - 27 = 21 \\ S_{ABCD} &= 3 + 21 = 24 \end{aligned}$$

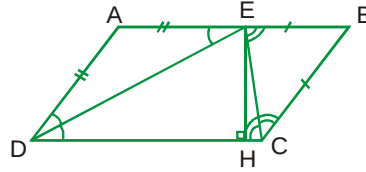
Cavab: B

4. ABCD – paraleloqram, DE və CE tən böləndir. $BC=5$ sm, $HC=2$, $EH \perp DC$ isə $S_{DEC}=?$



- A) 10 B) 15 C) 18 D) 20 E) 24

Həlli:



$$\angle DEC = 90^\circ, DC = 10, DH = 10 - 2 = 8$$

$$EH = \sqrt{DH \cdot HC} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$$

$$S_{DEC} = \frac{1}{2} DC \cdot EH = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20, S_{DEC} = 20$$

Cavab: D

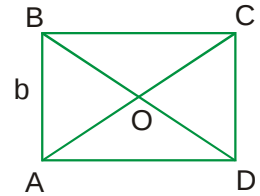
- Bucaqları bərabər olan paraleloqrama düzbucaqlı deyilir

Xassələri:

1. $AC = BD = d$

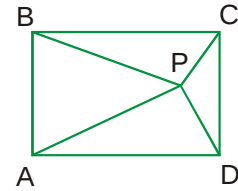
$$AO = OC = BO = OP$$

$$a^2 + b^2 = d^2$$



2. $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$

P-müstəvinin ixtiyari nöqtəsidir



NÜMUNƏLƏR:

1. Tərəfləri x və $5x$ sm olan düzbucaqlının sahəsi 80 sm^2 -dir. Düzbucaqlının perimetrini tapın.
A) 40 B) 48 C) 50 D) 60 E) 61

Həlli:

$$S = x \cdot 5x = 80$$

$$5x^2 = 80$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \text{ sm}$$

$$P = 2(x + 5x) = 2 \cdot 6x = 12x = 12 \cdot 4 = 48 \text{ cm}$$

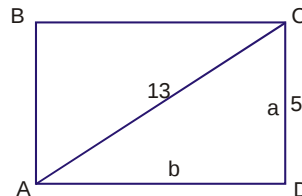
Cavab: B

2. Diaqonalı 13 sm və tərəflərindən biri 5 sm olan düzbucaqlının sahəsini tapın.
A) 30 B) 60 C) 45 D) 50 E) 54

Həlli:

$$a^2 + b^2 = 13^2$$

$$5^2 + b^2 = 13^2$$



$$b^2=144$$

$$b=12$$

$$S_{(ABCD)}=ab=12 \cdot 5=60 \text{ sm}$$

Cavab: B

3. Düzbucaqlının perimetri 120sm olub tərəfləri 3 və 7 ədədləri ilə mütənasibdir.

Düzbucaqlının sahəsini tapın.

- A) 526 B) 642 C) 756 D) 756 E) 525

Həlli:

$$P = 2(a+b)$$

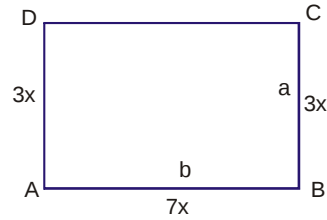
$$120 = 2(3x+7x)$$

$$120=2 \cdot 10x$$

$$120=20x$$

$$x=6 \text{ cm}$$

$$S_{(ABCD)}=3x \cdot 7x=21 \cdot x^2=21 \cdot 6^2=21 \cdot 36=756 \text{ sm}^2$$



Cavab: D

4. Tərəfləri a və b olan düzbucaqlıda $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ – dir .

Düzbucaqlının perimetri 48 sm isə, onun sahəsini tapın.

- A) 96 B) 108 C) 256
D) 432 E) 532

Həlli:

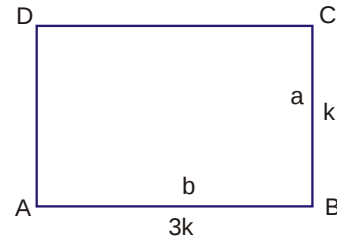
$$P = 2(a+b)$$

$$48 = 2(k+3k)$$

$$48=2 \cdot 4k$$

$$k=6$$

$$S_{(ABCD)}=a \cdot b=k \cdot 3k=3 \cdot k^2=3 \cdot 6^2=108$$



Cavab: B

5. Sahəsi 120 sm² və diaqonalı 17 sm olan düzbucaqlının perimetrini tapın.

- A) 23 B) 30 C) 36 D) 40 E) 46

Həlli:

$$S_{(ABCD)} = a \cdot b$$

$$a \cdot b=120 \text{ sm}^2$$

$$a^2 + b^2 = 289$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

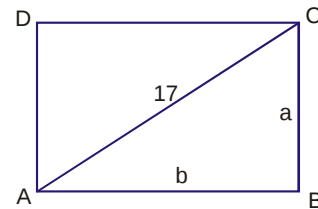
$$289 = (a+b)^2 - 2 \cdot 120$$

$$289 = (a+b)^2 - 240$$

$$(a+b)^2 = 529$$

$$a+b = 23$$

$$P_{ABCD} = 2(a+b) = 2 \cdot 23 = 46$$



Cavab:E

6. ABCD düzbucaqlıdır.

$$AF = 4 \text{ sm},$$

$$FC = 9 \text{ sm},$$

$$S_{(ABCD)} = ?$$

- A) 39 B) 78 C) 68
D) 48 E) 58

Həlli:

$$DF = x$$

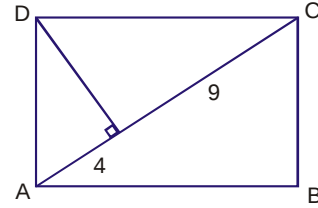
$$x^2 = AF \cdot FC$$

$$x = 6 \text{ sm}$$

$S_{(ADS)}$ üçbucağının sahəsi

$$S_{(ADC)} = \frac{AC \cdot DF}{2} = \frac{13 \cdot 6}{2} = 39$$

$$S_{(ABCD)} = 2 \cdot S_{(ADC)} = 2 \cdot 39 = 78 \text{ sm}^2$$



Cavab: B

7. ABCD düzbucaqlıdır. DE=3, CE=4 və AE = 2 olarsa, BE=x=?

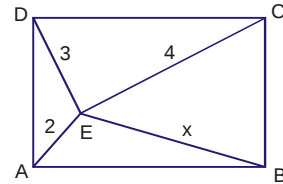
- A) 4 B) $\sqrt{7}$ C) $\sqrt{8}$ D) $\sqrt{10}$ E) $\sqrt{11}$

Həlli:

$$x^2 + 3^2 = 2^2 + 4^2$$

$$20 = x^2 + 9$$

$$x = \sqrt{11}$$



Cavab: E

- Tərəfləri bərabər olan paraleloqrama romb deyilir

Xassələri:

1. $AB = BC = CD = DA = a$

2. $AC \perp BD$

3. $BD^2 + AC^2 = 4a^2$

4. $\triangle ABO = \triangle BOC = \triangle DOC = \triangle AOD$

5. $h = 2r$, r daxilə çəkilmiş çevrənin radiusudur

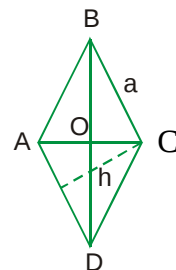
$$h = \frac{d_1 \cdot d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}$$

Sahə düsturları:

$$S = ah$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$$

$$S = a^2 \cdot \sin \alpha$$



NÜMUNƏLƏR:

1. Diaqonalları 12 sm və 16 sm olan rombun perimetrinin tapın.

- A) 20 B) 25 C) 30 D) 36 E) 40

Həlli:

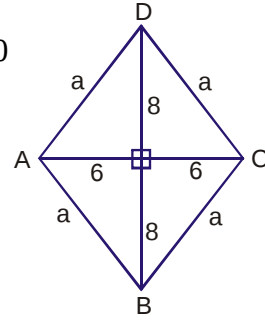
$$6^2 + 8^2 = a^2$$

$$100 = a^2$$

$$a = 10 \text{ sm}$$

$$P = 4a$$

$$P = 4 \cdot 10 = 40 \text{ sm}$$



Cavab: E

2. Diaqonalları 24 və 10 sm olan rombun tərəfini tapın.

- A) 11 B) 12 C) 13 D) 15 E) 16

Həlli: I üsul

$$AC = e = 10 \text{ sm}$$

$$BD = f = 24 \text{ sm}$$

$$12^2 + 5^2 = a^2$$

$$144 + 25 = a^2$$

$$a^2 = 169$$

$$a = 13$$

II üsul

$$P = 4a = 4 \cdot 13 = 52$$

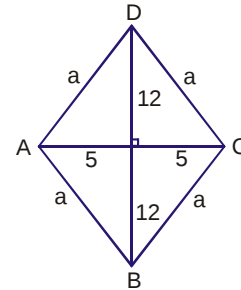
$$e^2 + f^2 = 4a^2$$

$$(24)^2 + (10)^2 = 4a^2$$

$$676 = 4a^2$$

$$169 = a^2$$

$$a = 13 \text{ sm}$$



Cavab: C

3. Tərəfi 20 sm və diaqonallarından biri 24 sm olan rombun sahəsini tapın.

- A) 384 B) 386 C) 390 D) 396 E) 400

Həlli:

$$x^2 + 12^2 = 20^2$$

$$x^2 + 144 = 400$$

$$x^2 = 256$$

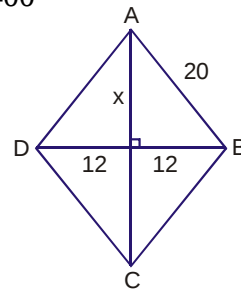
$$x = 16$$

$$AC = e = 32$$

$$BD = f = 24$$

$$S_{(ABCD)} = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{32 \cdot 24}{2} = 16 \cdot 24$$

$$S_{(ABCD)} = 384$$



Cavab: A

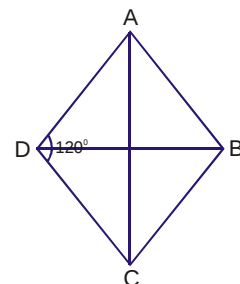
4. ABCD rombdur. $\angle B = 120^\circ$, $AB = 16 \text{ sm}$ isə,

$$AC = ?$$

A) $8\sqrt{3}$

B) $10\sqrt{3}$

C) $12\sqrt{3}$

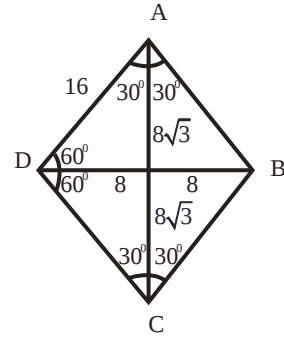


D) $16\sqrt{3}$

E) $20\sqrt{3}$

Həlli: Şəkildən göründüyü kimi

$AC = 8\sqrt{3} + 8\sqrt{3}, \quad AC = 16\sqrt{3}$ sm olur.



Cavab: D

5. Tərəfi, diaqonalları arasında orta mütənasib olan rombun iti bucağı neçə dərəcədir?

A) 20 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

Həlli:

Rombun tərəfi a , iti bucağı α olsun.

$AO = AB \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow AC = 2a \cos \frac{\alpha}{2}$

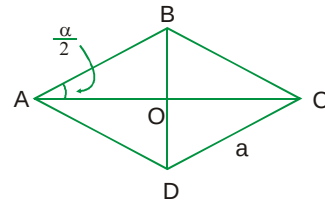
$OB = AB \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow BD = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$

Şərtə görə

$a^2 = AC \cdot BD$

$a^2 = 2a \sin \frac{\alpha}{2} \cdot 2a \cos \frac{\alpha}{2} = 2a^2 \sin \alpha$

$\sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$



Cavab: B

- Tərəfləri və bucaqları bərabər olan paraleloqrama kvadrat deyilir

Xassələri:

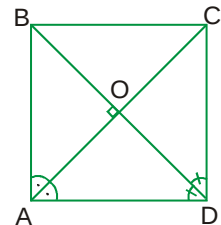
1. $AB = BC = CD = DA = a$

2. $AC \perp BD$

3. $BD^2 + AC^2 = 4a^2$

4. $\triangle ABO = \triangle BOC = \triangle DOC = \triangle AOD$

5. $h = 2r$, r daxilə çəkilmiş çevrənin radiusudur



6. $AC \perp BD, \quad AC = BD$

7. AC, BD -tənbövləndirlər.

8. $AB^2 = \frac{AC^2}{2}, \quad P = 4a$

P - perimetrdir

NÜMUNƏLƏR:

1. Diaqonalı $8\sqrt{2}$ sm olan kvadratın sahəsini tapın.
A) 54 B) 64 C) 36 D) 32 E) 74

Həlli:

$$S_{(ABCD)} = \frac{e^2}{2} = \frac{(8\sqrt{2})^2}{2} = 64 \text{ cm}^2$$

Cavab: B

2. Diaqonalı $\sqrt{7}$ sm olan kvadratın perimetrini tapın.
A) $\sqrt{7}$ B) $2\sqrt{7}$ C) $2\sqrt{14}$ D) 14 E) 8

Həlli:

Diaqonal $a\sqrt{2}$ -yə bərabərdir.

$$a\sqrt{2} = \sqrt{7}, a = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$$

$$P = 4a = 4 \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = 4 \frac{\sqrt{14}}{2} = 2\sqrt{14} \text{ sm}$$

Cavab: C

3. Perimetri 3 sm olan kvadratın sahəsini tapın.
A) $\frac{9}{16}$ B) $\frac{16}{9}$ C) $\frac{16}{3}$ D) $\frac{3}{16}$ E) 9

Həlli:

$$P = 4a; 3 = 4a; a = \frac{3}{4}$$

$$S = a^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

Cavab: A

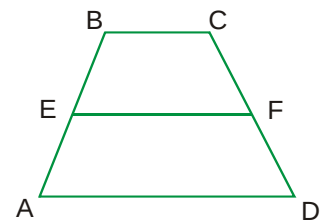
4. Tərəfi 2^9 sm olan kvadratın sahəsini tapın.
A) 12^{10} B) 2^{12} C) 2^{13} D) 2^{14} E) 2^{18}

Həlli:

$$S = a^2 = (2^9)^2 = 2^{18} \text{ sm}^2$$

Cavab: E

- Yalnız iki qarşı tərəfi paralel olan dördbucaqlıya trapesiya deyilir. E nöqtəsi AB, F nöqtəsi CD –nin orta nöqtəsi olduqda EF trapesiyanın orta xətti adlanır.



Xassələri:

1. $AD \parallel BC$, $\angle A + \angle B = \angle D + \angle C = 180^\circ$

2. EF orta xətt isə $AD \parallel EF \parallel BC$ və

$$EF = \frac{a+b}{2}, MN = \frac{a-b}{2}$$

$$EM = NF = \frac{b}{2}, EN = MF = \frac{a}{2}$$

$$AM = MC, DN = NB$$

3. $\frac{AO}{OC} = \frac{OD}{OB} = \frac{a}{b}$

$MN \parallel AD \parallel BC$ isə

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow MN = 2x = \frac{2ab}{a+b}$$

4. $AB = CD$ isə $\Rightarrow \angle A = \angle D, \angle B = \angle C$,

$$AO = DO, BO = OC$$

5. $AC \perp BD$ isə $BK = KC = KO$

$$AL = LD = LO$$

$$AD = a, BC = b, KL = H$$
 isə

$$H = \frac{a+b}{2} \text{ doğrudur}$$

6. ABCD düzbucaqlı trapesiya və $AC \perp BD$

$$\text{isə } H^2 = ab \text{ doğrudur}$$

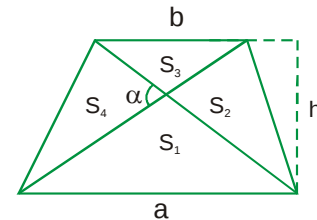
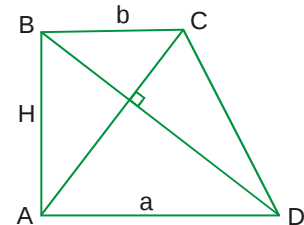
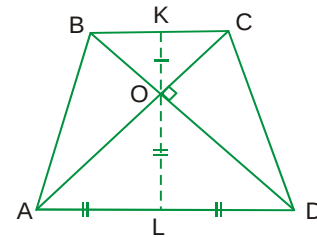
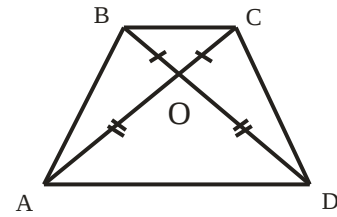
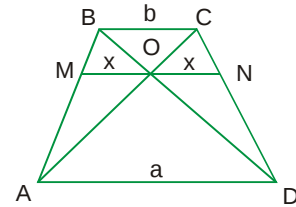
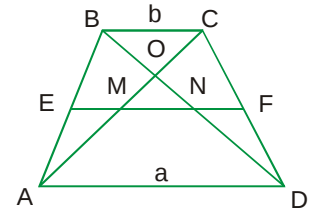
7. Sahə düsturları:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

$$S_2 = S_4$$

$$S_2 = \sqrt{S_1 \cdot S_3}$$

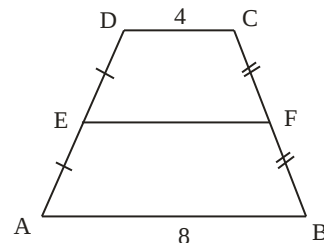
$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3})^2$$



NÜMUNƏLƏR:

1. ABCD trapesiyasında,

$$DC = 4, AB = 8,$$



EF = ?

- A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

Həlli:

EF orta xətdir. $EF = \frac{a+c}{2} = \frac{4+8}{2} = 6 \text{ sm}$

Cavab: C

2. Şəklə görə $S_{(ABCD)} = ?$

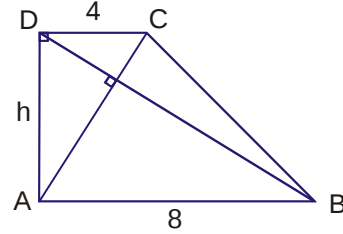
- A) $8\sqrt{2}$ B) $12\sqrt{2}$ C) $16\sqrt{2}$
D) $20\sqrt{2}$ E) $24\sqrt{2}$

Həlli:

$$h^2 = a \cdot c = 4 \cdot 8, h = 4\sqrt{2}$$

$$S_{(ABCD)} = \frac{(a+c) \cdot h}{2} = \frac{(8+4) \cdot 4\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{12 \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 24\sqrt{2} \text{ sm}^2$$



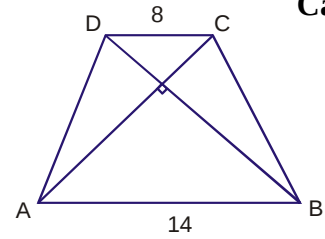
Cavab: E

3. ABCD bərabəryanlı trapesiyadır. $AC \perp BD$

$DC=8, AB = 14$ olarsa,

$S_{(ABCD)} = ?$

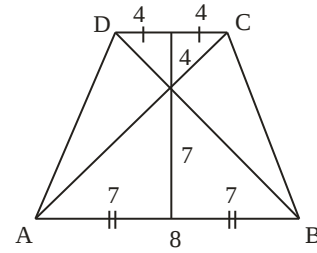
- A) 120 B) 121 C) 122
D) 124 E) 131



Həlli:

$$h = \frac{14+8}{2} = 11;$$

$$S_{(ABCD)} = h^2 = 11^2 = 121$$

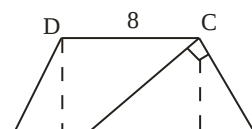
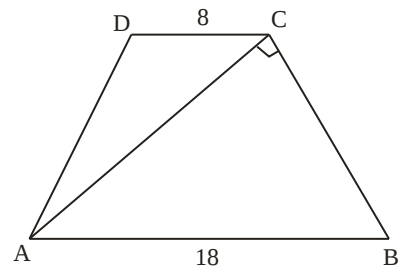


Cavab: B

4. Şəkində $AC \perp BC$, $|AD| = |BC|$

$OC = 8, AB = 18$ isə

$C_{(ABCD)} = ?$



- A) $7\sqrt{65}$ B) $10\sqrt{65}$ C) $13\sqrt{65}$
D) $15\sqrt{65}$ E) $18\sqrt{65}$

Həlli:

$$h^2 = 13 \cdot 5$$

$$h = \sqrt{65}$$

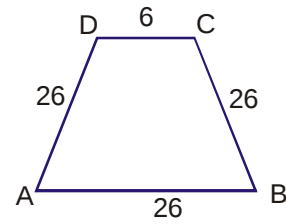
$$S_{(ABCD)} = \frac{(a+c)h}{2} = \frac{(18+8)\sqrt{65}}{2} = 13\sqrt{65}$$

Cavab: C

5. Şəkində $DC = 6$, $AD=BC = 26$
 $AB=26$ sm

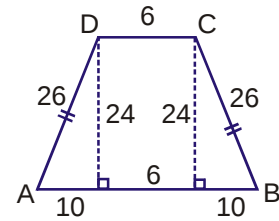
$$S_{(ABCD)} = ?$$

- A) 184 B) 284 C) 289
D) 294 E) 384



Həlli:

$$S_{(ABCD)} = \frac{(a+c)h}{2} = \frac{(26+6)24}{2} = \frac{32 \cdot 24}{2} = 384$$



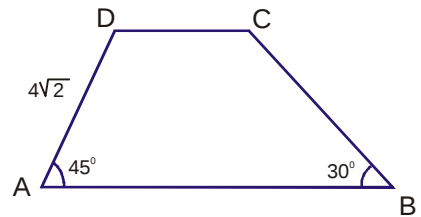
Cavab: E

6. Şəkində $DC=BC$

$$AD = 4\sqrt{2} \quad \angle A = 45^\circ,$$

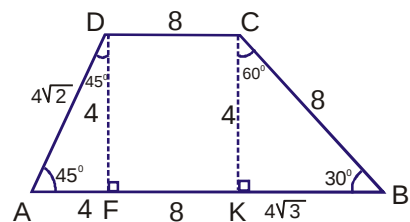
$$\angle B = 30^\circ, AB = ?$$

- A) $4 + 4\sqrt{3}$ B) $8 + 4\sqrt{3}$ C) $12 + 4\sqrt{3}$
D) $12 + \sqrt{3}$ E) $4\sqrt{3}$



Həlli:

$$AB = 4 + 8 + 4\sqrt{3} = 12 + 4\sqrt{3} \text{ sm}$$



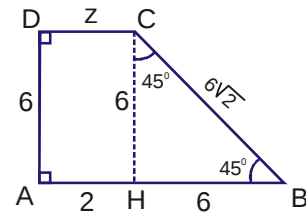
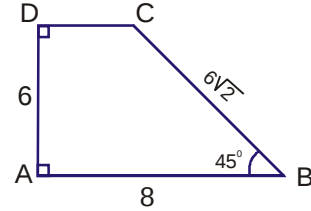
Cavab: C

7. $AB = 8\text{sm}$
 $BC = 6\sqrt{2}$
 $S_{(ABCD)} = ?$

A) 20 B) 24 C) 28 D) 30 E) 32

Həlli:

$$S_{(ABCD)} = \frac{(a+c)h}{2} = \frac{(8+2)6}{2} = \frac{10 \cdot 6}{2} = 30$$



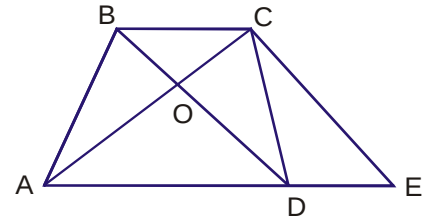
Cavab: D

8. Trapesiyanın diaqonalları 7 sm və 8 sm, oturacaqları 6 sm və 3 sm-dir. Trapesiyanın sahəsini tapın.
A) $4\sqrt{5}$ B) $6\sqrt{5}$ C) $10\sqrt{5}$
D) $12\sqrt{5}$ E) $15\sqrt{5}$

Həlli: C təpə nöqtəsindən BD diaqonalına paralel olan düz xətt çəkək. Bu düz xətt AD-ni E nöqtəsində kəsir. Qurmaya əsasən BCED paraleloqramdır. Onda $DE=BC$ və $CE=BD$. $\triangle ACE$ -də bütün tərəflər məlumdur: $AE=AD+DE=6+3=9$ sm, $CE=BD=7$ sm, $AC=8$ sm.

Digər tərəfdən üçbucaqla trapesiyanın hündürlükləri eyni olduğdan, $S_{\triangle ACE} = S_{ABCE}$

Heron düsturunu tətbiq etsək, $S_{ABCD} = S_{\triangle ACE} = 12\sqrt{5} \text{ sm}^2$ alarıq.



Cavab: D

4. ÇEVİRƏ VƏ DAİRƏ

Tərif: Müstəvi üzərində verilmiş nöqtədən (O) eyni məsafədə yerləşən bütün nöqtələr çoxluqluna çevrə deyilir. Verilmiş nöqtə (O) çevrənin mərkəzi adlanır.

Çevrənin mərkəzini onun ixtiyari nöqtəsi ilə birləşdirən düz xətt parçasına çevrənin radiusu deyilir. Mərkəzi O, radiusu R olan çevrə $O(R)$ kimi işarə olunur.

Tərif: Çevrə ilə məhdudlanan müstəvi hissəsinə dairə deyilir.

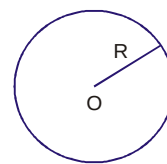
Çevrənin uzunluğu dairənin isə sahəsi vardır.

Tərif: Çevrə hissəsinə qövs deyilir.

Tərif: Çevrənin hər hansı iki nöqtəsini birləşdirən düz xətt parçasına vətər deyilir.

Tərif: Qövs və onu götürən vətərlə hüdudlanmış dairə hissəsinə seqment deyilir.

Tərif: Qövs və uclarına çəkilmiş radiuslarla hüdudlanmış dairə sahəsinə seqment deyilir.



ÇEVİRƏ. ÇEVİRƏNİN UZUNLUĞU. DAİRƏ VƏ ONUN SAHƏSİ

Çevrə ilə bağlı bucaqlar

Tərif: Eyni bir çevrədə iki radiusun əmələ gətirdiyi bucağa mərkəzi bucaq deyilir.

Teorem: Mərkəzi bucaq ona uyğun olan qövsün dərəcə ölçüsünə bərabərdir, yəni $\angle AOB = \cup AmB$.

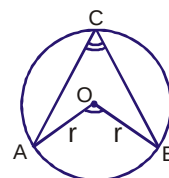
Tərif: Təpəsi çevrə üzərində olub tərəfləri bu çevrəni kəsən bucağa daxilə çəkilmiş bucaq deyilir ($\angle ACB$).

Mərkəzi bucağın ölçüsü, gərdiyi qövsün ölçüsünə bərabərdir.

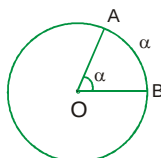
$$\angle AOB = \alpha, \quad \widehat{AB} = \alpha$$

Mərkəzi bucağın ölçüsü, gərdiyi qövsün ölçüsünə bərabərdir.

$$\angle AOB = \alpha, \quad \widehat{AB} = \alpha$$

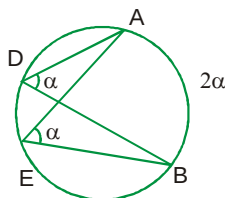


m

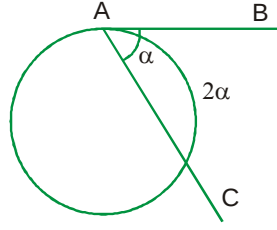


Daxilə çəkilmiş bucaq gərdiyi qövsün yarısı ilə ölçülür.

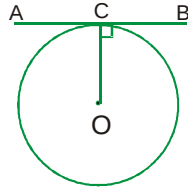
$$\angle D = \angle E = \alpha, \quad \widehat{AB} = 2\alpha$$



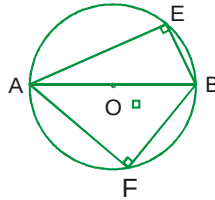
Kəsənlə toxunanın əmələ gətirdiyi, təpəsi çevrə üzərində olan bucaq, onların arasında qalan qövsün yarısı ilə ölçülür. $\angle BAC = \alpha, \quad \widehat{BC} = 2\alpha$



Toxunan, toxunma nöqtəsində çəkilən radiusa perpendikulyardır. $OC \perp AB$



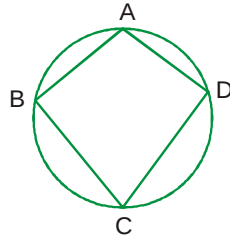
Diametrə söykənən bucaq 90^0 -dir. AB-diametr isə $\angle AEB = \angle AFB = 90^0$



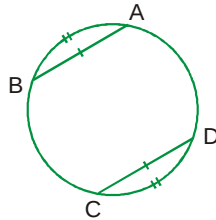
Daxilə çəkilmiş dördbucaqlının qarşı bucaqlarının cəmi 180^0 -dir.

$$\angle A + \angle C = 180^0,$$

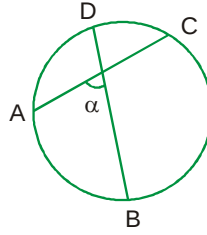
$$\angle B + \angle D = 180^0$$



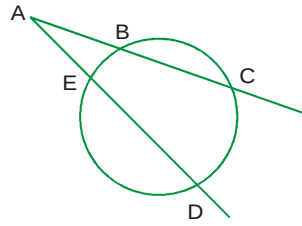
Eyni çevrədə bərabər vətərlərin gərdiyi qövslər bərabərdir. $AB=CD$ isə $\widehat{AB} = \widehat{CD}$



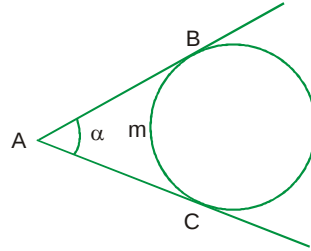
İki vətərin kəsişməsindən alınan bucaq $\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{DC}}{2}$ -dir.



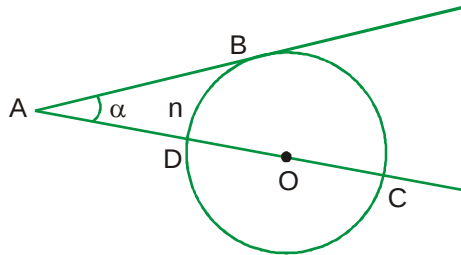
Təpəsi çevrə xaricində olan, tərəfləri çevrəni kəsən bucaq
 $\alpha = \frac{\widehat{CD} - \widehat{BE}}{2}$ ilə ölçülür.



a) Toxunanlar arasında qalan bucaq $\alpha + \widehat{BmC} = 180^\circ$ bərabərliyini ödəyir

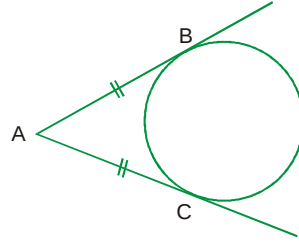


b) Kəsənlə toxunanın əmələ gətirdiyi, təpəsi çevrə xaricində olan bucağın bir tərəfi mərkəzdən keçirsə $\alpha + \widehat{DOB} = 90^\circ$ -dir.

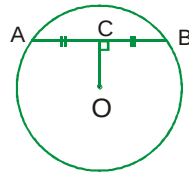


Çevrədə metrik münasibətlər

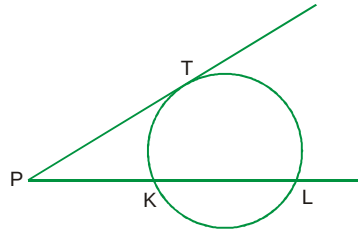
AB və AC çevrə xaricində olan A nöqtəsindən çəkilən iki toxunan isə $AB = AC$ –dir.



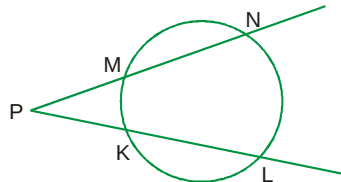
Mərkəzdən vətərə çəkilən perpendikulyar onu yarıya bölür. $OC \perp AB \Leftrightarrow AC = CB$



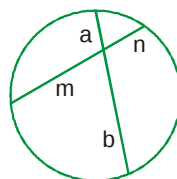
Bir P nöqtəsindən çevrəyə PT toxunanı və PL kəsəni çəkilsə $PT^2 = PK \cdot PL$ olur.



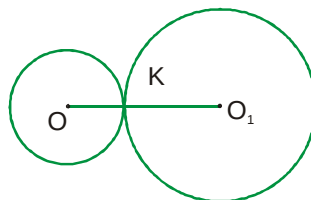
Bir P nöqtəsindən PN və PL kəsənləri çəkilsə $PM \cdot PN = PK \cdot PL$ olur.



Kəsişən iki vətər hissələri üçün $a \cdot b = m \cdot n$ doğrudur.

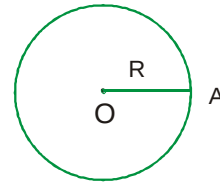


İki çevrənin toxunma nöqtəsi mərkəzləri birləşdirən düzxətt üzərindədir.



Dairə və onun hissələri

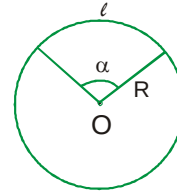
A) Çevrənin uzunluğu $C = 2\pi R$.



B) Çevrə qövsünün uzunluğu

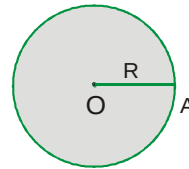
$$\ell = 2\pi \cdot R \cdot \frac{\alpha}{360}$$

(α - dərəcə)



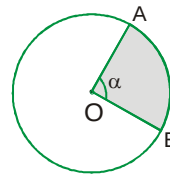
C) Dairənin sahəsi

$$S = \pi R^2$$

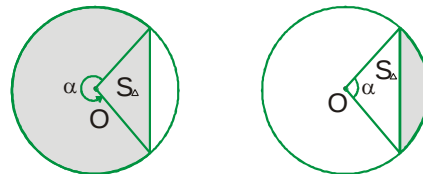


D) Dairə sektorünün sahəsi

$$S_{\text{sekt}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha, \quad (\alpha - \text{dərəcə})$$



E) Dairə seqmentinin sahəsi $S_{\text{seqm}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} \pm S_{\Delta}$
(α - dərəcə)



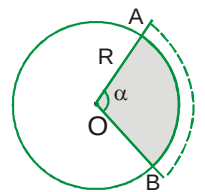
F) AB qövsü üçün

$$\ell = \frac{2\pi R}{360} \cdot \alpha \quad \text{və} \quad AOB \text{ sektoru üçün}$$

$$S_{(\text{sekt})} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha \quad (\alpha - \text{dərəcə})$$

düsturlarını birləşdirməklə sektor sahəsi üçün α -dan asılı olmayan

$$S_{(\text{sekt})} = \frac{l \cdot R}{2} \quad \text{düsturunu almaq olar.}$$

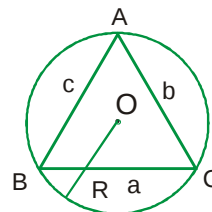


Xaricə çəkilmiş çevrə

ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusu R isə

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$S_{(ABC)} = \frac{abc}{4R} \quad \text{doğrudur.}$$

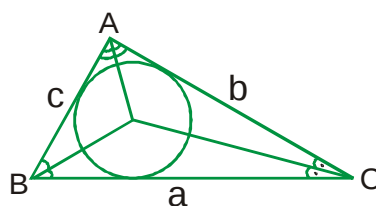


Daxilə çəkilmiş çevrə

İxtiyari ABC üçbucağının daxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi tənbölənlərin kəsişdiyi nöqtədir.

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$S_{(ABC)} = p \cdot r$$



(r - çevrənin radiusudur)

Düzgün çoxbucaqlı

Düzgün çoxbucaqlının sahəsi S isə

$$S = \frac{1}{2} n R^2 \sin \alpha \quad \text{və ya}$$

$$S = \frac{1}{2} a_n r \quad \text{doğrudur.}$$

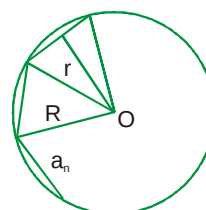
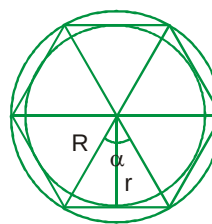
$$a_n = 2 R \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$S_n = n r^2 \tan \frac{180^\circ}{n}$$

$$a_3 = R \sqrt{3}$$

$$a_4 = R \sqrt{2}, \quad a_6 = R$$

$$a_8 = R \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad a_{12} = R \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$



NÜMUNƏLƏR:

1. Şəklə görə $x = ?$

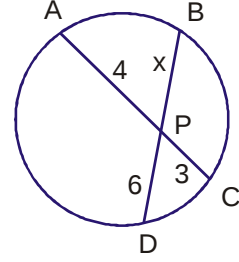
A) 2 B) 3 C) 4 D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}$

Həlli:

$$PA \cdot PC = PD \cdot PB$$

$$4 \cdot 3 = 6 \cdot x$$

$$12 = 6 \cdot x \Rightarrow x = 2$$



Cavab: A

2. Şəkildə A – toxunma nöqtəsidir.

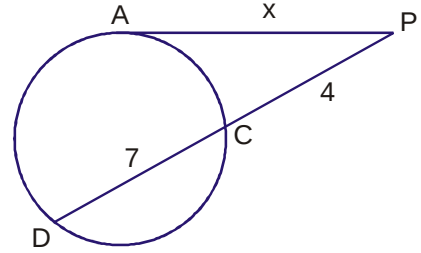
PC = 4, OC = 7 olarsa, $x = ?$

A) 6 B) 11 C) $2\sqrt{7}$
D) $2\sqrt{11}$ E) $11\sqrt{2}$

Həlli:

$$PA^2 = PC \cdot PD$$

$$x^2 = 4 \cdot 11 \Rightarrow x = 2\sqrt{11}$$



Cavab: D

3. Şəkildə BA = 5, BC = 4,

DC = 3, DE = $x = ?$

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

Həlli:

$$CB \cdot CA = CD \cdot CE$$

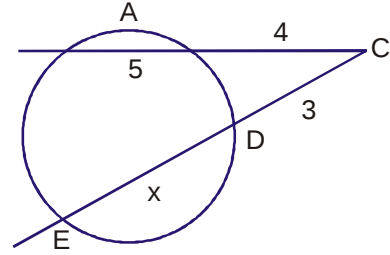
$$4 \cdot (4+5) = 3 \cdot (3+x)$$

$$4 \cdot 9 = 3 \cdot (3+x)$$

$$4 \cdot 3 = x+3$$

$$12 = x+3$$

$$x = 9$$



Cavab: D

4. Radiusu 10 sm olan çevrənin mərkəzindən 6 sm məsafədə yerləşən vətərin uzunluğunu tapın.

A) 16 B) 14 C) 13 D) 12 E) 10

Həlli:

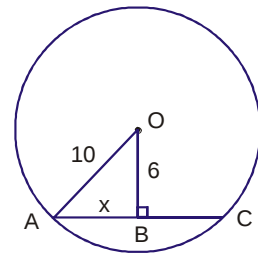
$$10^2 = 6^2 + x^2$$

$$100 = 36 + x^2$$

$$x^2 = 64$$

$$x = 8 \text{ sm}$$

$$AB = BC \text{ isə } AC = 8+8 = 16 \text{ sm}$$

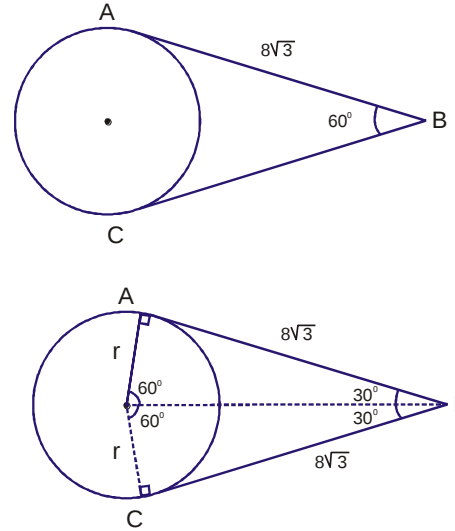


Cavab: A

5. Şəkilə A və C nöqtələri toxunan nöqtələrdir.

$\angle B = 60^\circ$, $AB = 8\sqrt{3}$ sm-dir. Çevrənin radiusunu tapın.

- A) 6 B) 7 C) 8
D) $3\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$



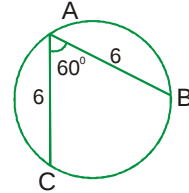
Həlli:

60° -nin qarşısında $8\sqrt{3}$ olduğuna görə, 30° -nin qarşısındakı tərəf 8 sm-dir. $r = 8$ sm.

Cavab: C

6. $AB = AC = 6$ sm və $\angle BAC = 60^\circ$ isə çevrənin diametri neçə sm-dir?

- A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

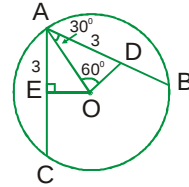


Həlli:

AB və AC-nin orta perpendikulyarı mərkəzdə kəsişdiyi üçün O çevrənin mərkəzidir. $\angle OAD = 30^\circ \Rightarrow OD = \frac{AO}{2}$

$\triangle ADO$ -dan $AO = 2\sqrt{3}$

Diametr $2R = 4\sqrt{3}$



Cavab: D

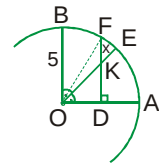
7. O mərkəzli çevrədə $OB \perp OA$, $OB = 5$ sm, $OD = 3$ sm, OE-tənbölən isə şəkildə $FK = ?$

- A) $1/2$ B) 1 C) 2 D) 3 E) 3.5

Həlli:

$\triangle ODF$ -dən $5^2 = 3^2 + (3+x)^2$

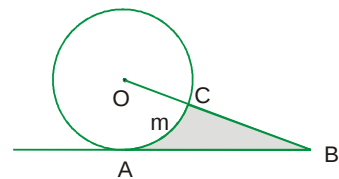
($OD = DK = 3$), $(3+x)^2 = 16 \Rightarrow x+3=4 \Rightarrow x=1$ sm



Cavab: B

8. O mərkəzli çevrədə $OB = 4$ sm, $\angle ABO = 30^\circ$, AB toxunan isə S_{AmCB} neçə sm^2 -dir? ($\pi = 3$ qəbul edin).

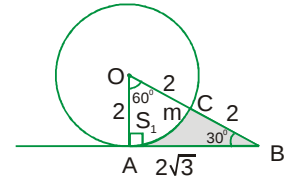
- A) $\sqrt{3} - 1$ B) $\sqrt{3} + 1$ C) $2\sqrt{3} - 1$ D) $2\sqrt{3} - 2$ E) $\sqrt{3}$



Həlli:

$$S_{AmCB} = S_{AOB} - S_1$$

$$S_{AmCB} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} - \frac{2^2 \pi \cdot 60}{360} = 2\sqrt{3} - 2 \text{ sm}^2$$



Cavab:

9. BD mərkəzi O olan çevrəyə toxunan, AC=DC, qeyd olunan sahələrin cəmi 64 sm^2 isə çevrənin radiusu neçə sm-dir.

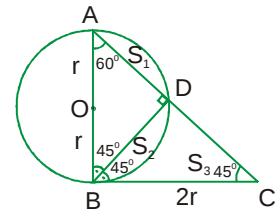
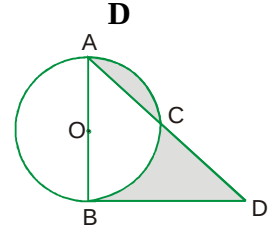
- A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

Həlli:

$$AC \perp BD, \angle ADB = 90^\circ, BD = \frac{AC}{2}, AD = BD \Rightarrow S_1 = S_2$$

$$AD = DC = BD = r\sqrt{2}$$

$$S_{DBC} = \frac{r\sqrt{2} \cdot r\sqrt{2}}{2} = 64 \text{ sm}^2 \Rightarrow r^2 = 64 \Rightarrow r = 8 \text{ sm}$$



Cavab: B

10. Eyni mərkəzi iki çevrəyə şəkildəki kimi toxunanlar çəkilmişdir. PA=6 sm və çevrələr arasındakı zolağın sahəsi $9\pi \text{ sm}^2$ -dir. PD neçə sm-dir?

- A) 6 B) $6\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{3}$
D) 9 E) $9\sqrt{2}$

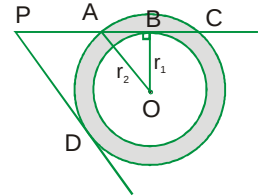
Həlli:

$$\pi(r_2^2 - r_1^2) = 9\pi \Rightarrow r_2^2 - r_1^2 = 9$$

$$\triangle AOB\text{-dən } AB^2 = r_2^2 - r_1^2 = 9 \Rightarrow AB = 3 \text{ sm}$$

$$PD^2 = PA \cdot PC = 6 \cdot (6+6) = 72$$

$$PD = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ sm}$$



Cavab: B

11. CD, C nöqtəsində, PA, A nöqtəsində çevrəyə toxunur. $\angle DCB = 40^\circ$, $\angle CPA = 30^\circ$ isə $\angle A\hat{m}C$ neçə dərəcədir?

- A) 150 B) 160 C) 170 D) 180 E) 190

Həlli:

$$\angle APB = \frac{1}{2}(\angle A\hat{m}C - \angle A\hat{n}B) = 30^\circ$$

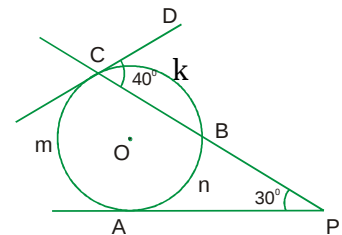
$$\angle A\hat{m}C - \angle A\hat{n}B = 60^\circ \quad (1)$$

$$\angle A\hat{m}C + \angle A\hat{n}B + \angle B\hat{k}C = 360^\circ$$

$$\angle A\hat{m}C + \angle A\hat{n}B = 360^\circ - \angle B\hat{k}C = 360^\circ - 80^\circ = 280^\circ \quad (2)$$

(1) və (2)-dən

$$2\angle A\hat{m}C = 340^\circ \Rightarrow \angle A\hat{m}C = 170^\circ$$



Cavab: C

12. D, E, F üçbucağın tərəflərinin daxilə çəkilmiş çevrə ilə toxunma nöqtələridir. $\angle B=40^\circ$, $\angle C=62^\circ$ isə $\angle FDE=?$

- A) 46 B) 47 C) 49 D) 50 E) 51

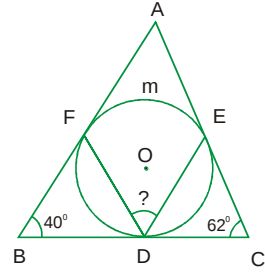
Həlli:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \Rightarrow \angle A = 180^\circ - (40^\circ + 62^\circ) = 78^\circ$$

$$\angle A + \angle F\hat{m}E = 180^\circ \Rightarrow \angle F\hat{m}E = 180^\circ - 78^\circ = 102^\circ$$

$$\angle F\hat{m}E = 102^\circ$$

$$\angle FDE = \frac{1}{2} \angle F\hat{m}E = \frac{1}{2} \cdot 102^\circ = 51^\circ$$



Cavab:

E

13. PA və PB çevrəyə toxunandılar. $\angle P=2x+20^\circ$, $\angle Q=3x-40^\circ$ isə $\angle P$ =neçə dərəcədir?

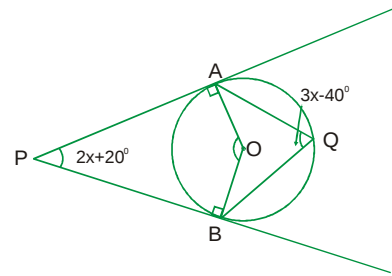
- A) 40 B) 50 C) 64 D) 76 E) 80

Həlli:

Çevrənin mərkəzi O olsun. Onda $\angle APB + \angle AOB = 180^\circ \Rightarrow$

$$2x+20^\circ + 6x-80^\circ = 180^\circ \Rightarrow 8x=240^\circ \Rightarrow x=30^\circ$$

$$\angle P = 2x+20^\circ = 80^\circ$$



Cavab: E

14. O çevrəsinə P-dən PA toxunanı və PB kəsəni çəkilmişdir. $\angle P=20^\circ$, $\angle B=40^\circ$ isə $\angle OAB=?$

- A) 30 B) 25 C) 20 D) 15 E) 10

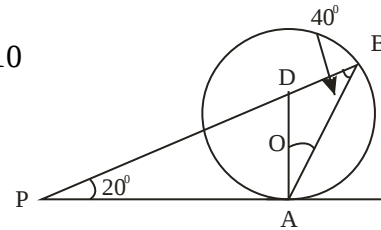
Həlli:

DA $\perp$ AP olduğu üçün ADP-də $\angle PDA + \angle P = 90^\circ \Rightarrow$

$$\angle PDA + 20^\circ = 90^\circ \Rightarrow \angle PDA = 70^\circ$$

$$70^\circ = 40^\circ + \angle BAD \Rightarrow \angle BAD = \angle OAB = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ \Rightarrow$$

$$\angle OAB = 30^\circ$$



Cavab: A

15. Düzbucaqlı ABC üçbucağının daxilində çevrə çəkilmişdir. AB=12 sm, BC=5 sm isə CD neçə sm-dir.

- A) $\sqrt{20}$ B) $\sqrt{21}$ C) $\sqrt{29}$
D) $\sqrt{34}$ E) $\sqrt{35}$

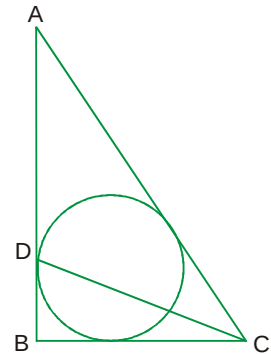
Həlli:

$$\triangle ABC\text{-dən } AC = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13,$$

$$2P = 13 + 12 + 5 \Rightarrow 2P = 30 \Rightarrow P = 15$$

$$BD = 15 - 13 = 2$$

$$\triangle BDC\text{-dən } CD = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \text{ alınar}$$



Cavab: C

5. KOORDİNATLAR ÜSULU

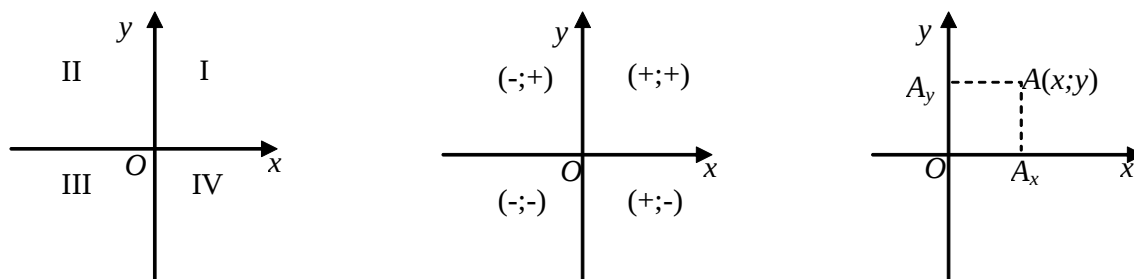
Müstəvidə dekart koordinat sistemi

Müstəvi üzərində götürülmüş ixtiyari O nöqtəsində kəsişən perpendikulyar Ox və Oy oxları düzbucaqlı koordinat sistemi əmələ gətirir. O - koordinat başlanğıcı, Ox - absis, Oy - ordinat oxları adlanır.

Koordinat oxları koordinat müstəvisini dörd hissəyə ayırır. Bu hissələrə rüblər deyilir. Onları yuxarı sağ bucaqdan başlamaq şərti ilə saat əqrəbinin əksi istiqamətində I, II, III, IV rum rəqəmləri ilə işarə edirlər.

Ox və Oy oxları O nöqtəsi ilə iki yarımoxa bölünür. Şərti olaraq bunlardan biri müsbət (oxla göstərilir), digəri mənfi qəbul edilir.

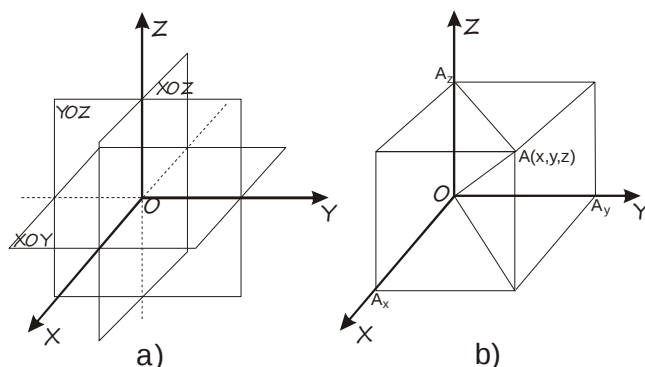
Müstəvi üzərində götürülmüş ixtiyari A nöqtəsinin vəziyyətini koordinat sistemində müəyyən etmək üçün bu nöqtədən $AA_x \perp Ox$, $AA_y \perp Oy$ perpendikulyarları çəkilir. $OA_x = x$, $OA_y = y$ ədədlərinə A nöqtəsinin koordinatları deyilir və $A(x;y)$ kimi işarə edilir.



Fəzada koordinat sistemi

Fəzada koordinat sistemi uyğun qayda ilə verilir. Başlanğıc nöqtələri ortaq və qarşılıqlı perpendikulyar olan OX , OY , OZ oxları koordinat sistemi əmələ gətirir.

OX – absis, OY – ordinat, OZ – aplikat oxları adlanır. Koordinat oxlarının hər biri O nöqtəsi ilə iki yarım oxa bölünür. Bunlardan oxlarla göstərilənlər müsbət, digərləri mənfi qəbul edilir. Koordinat oxlarının hər cütündən müstəvi keçirək. X və y oxlarından keçən müstəvi XOY müstəvisi olur. Onda digər iki müstəvi uyğun olaraq XOZ , YOZ müstəviləri olar. XOY , XOZ , YOZ – koordinat müstəviləri adlanır (şəkil a). İxtiyari A nöqtəsinin koordinatlarının təyin etmək üçün bu nöqtədən koordinat müstəvilərinə paralel olan müstəvilər keçirək. Bu müstəvilərin uyğun koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri A_x, A_y, A_z olsun Onda $OA_x = x, OA_y = y, OA_z = z$ ədədləri A nöqtəsinin koordinatları olur və bu $A(x, y, z)$ kimi göstərilir (şəkil b).



Nöqtənin koordinat müstəviləri və koordinat oxları üzərində olan halları. Nöqtənin koordinatları:

YOZ müstəvi üzərində - $A(0, y, z)$;

XOZ müstəvi üzərində - $A(x, 0, z)$;

XOY müstəvi üzərində - $A(x, y, 0)$;

OX oxu üzərində - $A(x, 0, 0)$;

OY oxu üzərində - $A(0, y, 0)$;

OZ oxu üzərində - $A(0, 0, z)$;

olur.

Verilmiş nöqtədən koordinat başlanğıcına, koordinat oxlarına, koordinat müstəvilərinə qədər olan məsafələr

$A(x, y, z)$ nöqtəsindən koordinat başlanğıcına qədər məsafə; $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

OX oxuna qədər məsafə $d_x = \sqrt{y^2 + z^2}$;

OY oxuna qədər məsafə $d_y = \sqrt{x^2 + z^2}$;

OZ oxuna qədər məsafə $d_z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

XOY müstəvisinə qədər məsafə $d_{XOY} = |z|$;

XOZ müstəvisinə qədər məsafə $d_{XOZ} = |y|$;

YOZ müstəvisinə qədər məsafə $d_{YOZ} = |x|$;

düsturları ilə hesablanır.

İki nöqtə arasındakı məsafə düsturu

$A(x_1; y_1)$ və $B(x_2; y_2)$ nöqtələri arasındakı məsafə $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ düsturu ilə hesablanır.

Parçanın verilmiş nisbətə bölünməsi

$A(x_1; y_1)$ və $B(x_2; y_2)$ nöqtələrinin əmələ gətirdiyi AB parçasını $\frac{AC}{CB} = k; (k \geq 0)$ nisbətində bölən

$C(x; y)$ nöqtəsinin koordinatları aşağıdakı kimi hesablanır:

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k}; \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1+k}$$

Parçanın orta nöqtəsinin koordinatları

$A(x_1; y_1)$ və $B(x_2; y_2)$ nöqtələrini birləşdirən AB düz xətt parçasının $C(x; y)$ orta nöqtəsinin koordinatları aşağıdakı kimidir:

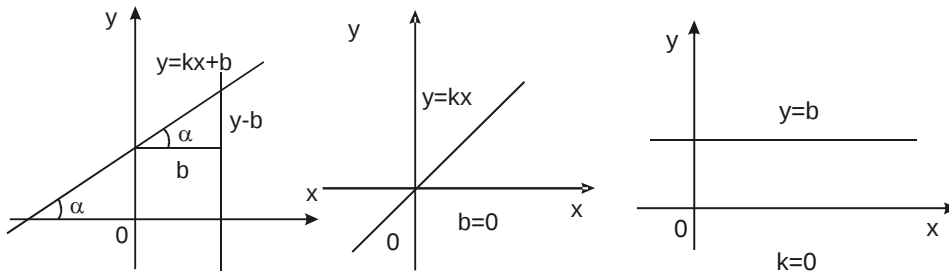
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Bu ifadələr yuxarıdakı düsturlardan $k=1$ qiymətində alınır.

Düz xəttin tənlikləri

Düz xəttin bucaq əmsallı tənliyi

Ordinat oxunu $B(0; b)$ nöqtəsində kəsən düz xəttin $y = kx + b$ şəklində olan tənliyinə düz xəttin bucaq əmsallı tənliyi deyilir. Burada $k = \operatorname{tg} \alpha$, α -meyl bucağıdır. Xüsusi halda, $b=0$ ($k \neq 0$) olduqda koordinat başlanğıcından keçən $y = kx$ düz xətti, $k = 0$ ($b \neq 0$) olduqda absis oxuna paralel olan $y=b$ düz xətti alınır



Bucaq əmsalı və bir nöqtəsi məlum olan düz xəttin tənliyi

$A(x_1; y_1)$ nöqtəsindən keçən və bucaq əmsalı k olan düz xəttin tənliyi:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

İki nöqtədən keçən düz xəttin tənliyi

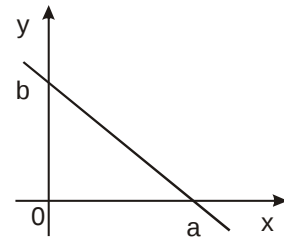
$A(x_1; y_1)$ və $B(x_2; y_2)$ nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyi:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Düz xəttin parçalarla tənliyi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1; \quad a \neq 0, b \neq 0$$

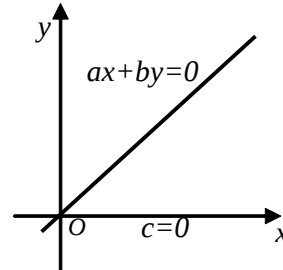
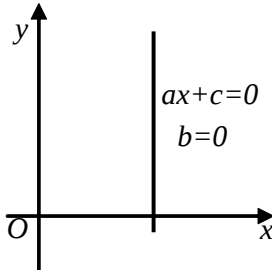
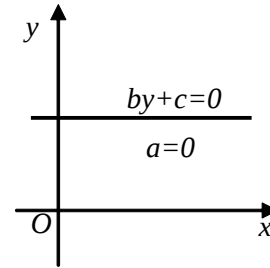
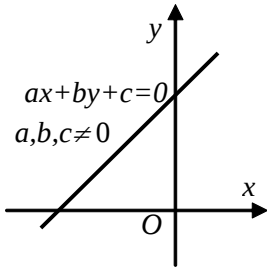
Burada a və b , düz xəttin Ox və Oy oxları üzərində O nöqtəsindən başlayaraq ayırdığı parçalardır.



Düz xəttin ümumi tənliyi

Yuxarıda göstərilən düz xətt tənliklərindən hər biri x və y dəyişənlərinə görə birdərəcəli tənliklərdir. Deməli, müstəvi üzərində olan ixtiyari düz xətt tənliyi $ax+by+c=0$ şəklində göstərilə bilər.

Şəkildə düz xəttin xüsusi halları göstərilmişdir.



Düz xəttin bucaq əmsalı

Düz xəttin bucaq əmsalı düz xəttin hansı tənlik vasitəsi ilə verilməsindən asılı olaraq müxtəlif üsullarla tapılır. Bunlardan hər birini ayrılıqda nəzərdən keçirək.

1. Düz xəttin bucaq əmsallı tənliyində $k = \operatorname{tg} \alpha$ olur.

2. Verilmiş ixtiyari iki $A(x_1; y_1)$ və $B(x_2; y_2)$ nöqtələrindən keçən düz xətt tənliyində $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ olur.

3. Düz xəttin parçalarla tənliyində bucaq əmsalı $k = -\frac{b}{a}$ kimi tapılır.

4. $ax+by+c=0$ şəklində verilmiş tənlikdə $k = -\frac{a}{b}$ olar.

5. Düz xətt Ox oxuna perpendikulyar olduqda bucaq əmsalı ($k = \operatorname{tg} 90^\circ$) təyin olunmur.

NÜMUNƏLƏR:

1. $A(5; -1)$ nöqtəsindən keçən və bucaq əmsalı 2 olan düz xəttin tənliyini yazın.

A) $2x - y = 0$ B) $2x - y - 11 = 0$ C) $y = 2x + 11$ D) $x = 2y + 11$ E) $x - y - 11 = 0$

Həlli: Verilmiş nöqtədən keçən və bucaq əmsalı məlum olan düz xəttin tənliyinə əsasən:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

$$y - (-1) = 2(x - 5)$$

$$y + 1 = 2x - 10$$

$$2x - y - 11 = 0$$

Cavab: B

2. $A(1;2)$ nöqtəsindən keçən və Ox oxunun mənfi istiqaməti ilə 45° -li bucaq əmələ gətirən düz xəttin tənliyini yazın.

- A) $x + y - 4 = 0$ B) $2x + y - 4 = 0$ C) $x + y - 3 = 0$ D) $x + 3y - 3 = 0$ E) $2x - y = 9$

Həlli: Verilmiş düz xətt Ox oxunun mənfi istiqaməti ilə 45° -li bucaq əmələ gətirir və deməli bu düz xətt Ox oxunun müsbət istiqaməti ilə 135° -li bucaq əmələ gətirəcək. Bucaq əmsalının tərifinə görə $k = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$ olur.

Onda verilmiş nöqtədən keçən və bucaq əmsalı məlum olan düz xəttin tənliyinə görə

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

$$y - 2 = -1(x - 1)$$

$$y - 2 = -x + 1$$

$$x + y - 3 = 0.$$

Cavab: C

3. $C(4; a)$ nöqtəsi verilmiş $A(2; 3)$ və $B(3; -1)$ nöqtələrindən keçən düz xəttin üzərindədirsə, a -nı tapın.

- A) 5 B) 4 C) -4 D) -5 E) 6

Həlli: Verilmiş iki $A(2;3)$ və $B(3;-1)$ nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyi:

$$\frac{y - 3}{-1 - 3} = \frac{x - 2}{3 - 2}$$

$$y - 3 = -4(x - 2)$$

$$4x + y - 11 = 0.$$

$C(4;a)$ nöqtəsi bu düz xəttə aid olduğu üçün, onun koordinatları bu düz xəttin tənliyini doğru bərabərliyə çevirməlidir.

Alınmış tənlikdə $x = 4$, $y = a$ yazsaq:

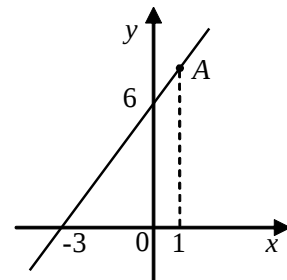
$$4 \cdot 4 + a - 11 = 0$$

$$a = -5 \text{ alırıq.}$$

Cavab: D

4. Şəkildə verilmiş A nöqtəsinin ordinatını tapın.

- A) 12 B) 3 C) 9
D) 6 E) 8



Həlli: A nöqtəsi koordinat oxlarını $(-3;0)$ və $(0;6)$ nöqtələrində kəsən düz xəttin üzərindədir. Düz xəttin parçalarla tənliyinə görə

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{6} = 1 \text{ və ya } -2x + y = 6$$

A nöqtəsi bu düz xəttə aid olduğu üçün, onun koordinatları bu tənliyi ödəməlidir:

$x=1$ qiymətini $-2x+y=6$ tənliyində nəzərə alsaq, $-2 \cdot 1 + y = 6$ və ya $y=8$ alırıq.

Cavab: E

5. $6x - 2y + 17 = 0$ tənliyi ilə verilmiş düz xəttin bucaq əmsalını tapın.

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0,5

Həlli: Verilmiş tənliyi $y = kx + b$ şəklinə gətirək:

$$-2y = -6x - 17$$

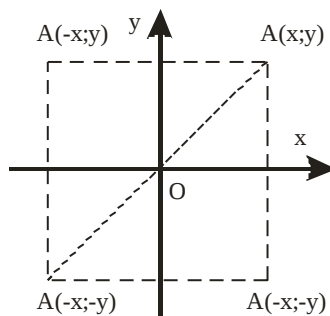
$$y = 3x + 8,5$$

Deməli $k=3$ -dür.

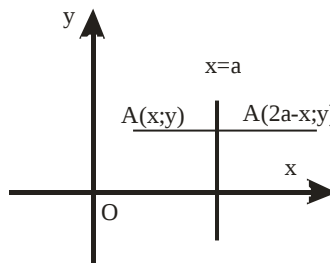
Cavab: C

Müstəvi simmetriya

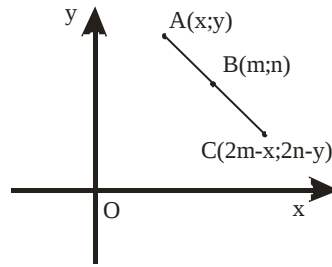
1. OXoxuna nəzərən $A(x; y)$ nöqtəsinə simmetrik olan nöqtə $A'(x; -y)$ -dir.
2. OYoxuna nəzərən $A(x; y)$ nöqtəsinə simmetrik olan nöqtə $A''(-x; y)$ -dir.
3. Koordinat başlanğıcına nəzərən $A(x; y)$ nöqtəsinə simmetrik olan nöqtə $A'''(-x; -y)$ -dir.



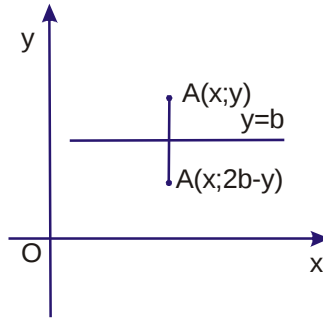
4. $x = a$ düz xəttinə nəzərən $A(x; y)$ nöqtəsinə simmetrik olan nöqtə $A(2a - x; y)$ -dir.



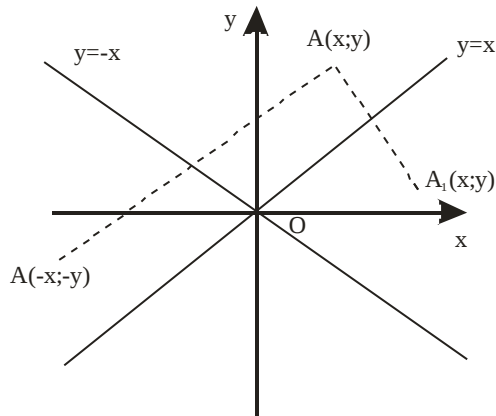
5. $B(m; n)$ nöqtəsinə nəzərən $A(x; y)$ nöqtəsinə simmetrik olan nöqtə $C(2m - x; 2n - y)$ -dir.



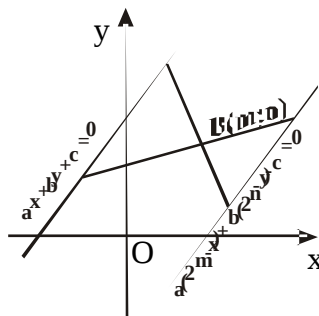
6. $y = b$ düz xəttinə nəzərən $A(x; y)$ simmetrik olan nöqtə $A'(x; 2b - y)$ -dir.



7. $y = x$ oxuna nəzərən $A(x; y)$ nöqtəsinə simmetrik olan nöqtə $A_1(y; x)$ -dir.
 8. $y = -x$ oxuna nəzərən $A(x; y)$ nöqtəsinə simmetrik olan nöqtə $A_2(-y; -x)$ -dir.

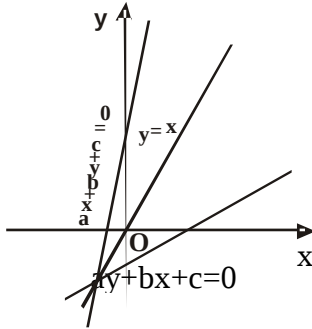


9. $B(m; n)$ nöqtəsinə nəzərən $ax + by + c = 0$ düz xəttinə simmetrik olan düz xəttin tənliyi:
 $a(2m - x) - b(2n - y) + c = 0$

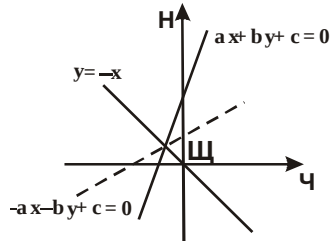


10. Koordinat başlanğıcına nəzərən $ax + by + c = 0$ düz xəttinə simmetrik olan düz xəttin tənliyi və onun qrafiki yuxarıdakı tənlik və qrafikdən $m = 0, n = 0$ halında alınır:
 $-ax - by + c = 0$

11. $y=x$ koordinat başlanğıcına nəzərən $ax + by + c = 0$ düz xəttinə simmetrik olan düz xəttin tənliyi: $ay + bx + c = 0$



12. $y = -x$ düz xəttinə nəzərən $ax + by + c = 0$ düz xəttinə simmetrik olan düz xəttin tənliyi:
 $-ay - bx + c = 0$



NÜMUNƏLƏR:

1. A (4; 3) nöqtəsinə OX oxuna görə simmetrik olan A' nöqtəsini tapın.

Həlli: 1-ci qaydaya görə $A' = (x_0; -y_0)$
 $A' = (4; -3)$ olar.

2. A (6; 5) nöqtəsinə OY oxuna görə simmetrik olan nöqtəni tapın.

Həlli: 2-ci qaydaya görə $A' = (-x_0; y_0)$
 $A' = (-6; 5)$ olar.

3. A (7; 5) nöqtəsinə koordinat başlanğıcına görə simmetrik olan nöqtəni tapın.

Həlli: 3-cü qaydaya görə $A' = (-7; -5)$ olar.

4. A (2; 3) nöqtəsinə $y=x$ düz xəttinə görə simmetrik olan nöqtəni tapın.

Həlli: 7-ci qaydaya görə $A' = (3; 2)$ olar.

5. A (8; 6) nöqtəsinə $y=-x$ düz xəttinə görə simmetrik olan nöqtəni tapın.

Həlli: 8-ci qaydaya görə $A' = (-6; -8)$ olar.

6. A (3; 4) nöqtəsinə P (6; 8) nöqtəsinə görə simmetrik olan nöqtəni tapın.

Həlli: 5-ci qaydaya görə $A' (2a-x_1; 2b-y_1)$

$$A' (2 \cdot 6 - 3; 2 \cdot 8 - 4)$$

$$A' (9; 12)$$

7. A (3; 5) nöqtəsinə $x=6$ düz xəttinə görə simmetrik olan nöqtəni tapın.

Həlli: 4-cü qaydaya görə

$$A' = (2a - x_1; y_1)$$

$$A' = (2 \cdot 6 - 3; 5)$$

$$A' = (9; 5)$$

8. A (7; 4) nöqtəsinə $y=5$ düz xəttinə görə simmetrik olan nöqtəni tapın.

Həlli: 6-cı qaydaya görə

$$A' = (x, 2b - y)$$

$$A' (7; 2 \cdot 5 - 4) = (7; 6)$$

$$A' (7; 6)$$

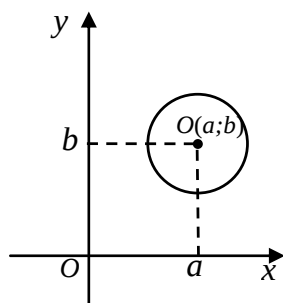
ÇEVİRƏ VƏ DAİRƏ

Çevrəyə dair məsələlərin koordinatlar üsulu ilə həlli

Çevrənin tənliyi

Mərkəzi $O(a;b)$, radiusu r olan çevrənin tənliyi

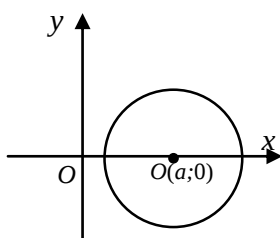
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$



Xüsusi hallar

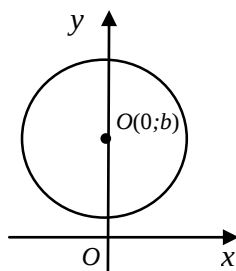
1. Mərkəzi Ox oxu üzərində olan çevrənin tənliyi

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2$$



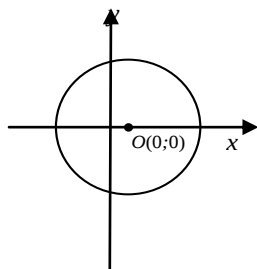
2. Mərkəzi Oy oxu üzərində olan çevrənin tənliyi

$$x^2 + (y-b)^2 = r^2$$



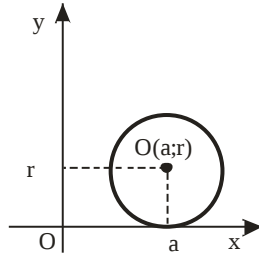
3. Mərkəzi koordinat başlanğıcı ilə üst-üstə düşən çevrənin tənliyi

$$x^2 + y^2 = r^2$$

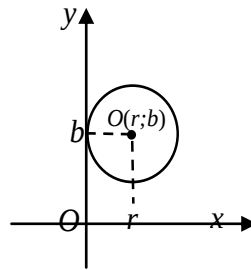


4. Çevrə Ox oxuna toxunur.

$$(x-a)^2 + (y-r)^2 = r^2$$



5. Çevrə Oy oxuna toxunur. $(x-r)^2 + (y-b)^2 = r^2$



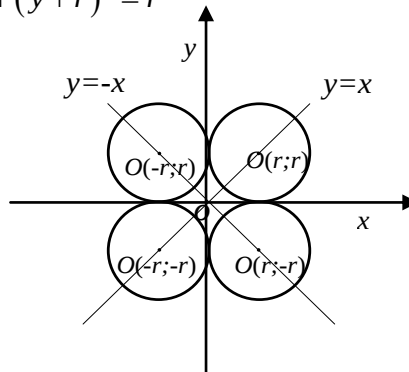
6. Çevrə həm Ox , həm də Oy oxuna toxunur. Burada çevrənin hansı rübdə olmasından asılı olaraq tənliklər də müxtəlif olur.

I rübdə- $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$

II rübdə- $(x+r)^2 + (y-r)^2 = r^2$

III rübdə- $(x+r)^2 + (y+r)^2 = r^2$

IV rübdə- $(x-r)^2 + (y+r)^2 = r^2$



NÜMUNƏLƏR:

1. $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 25$ tənliyi ilə verilmiş çevrənin mərkəzinin koordinatlarını və radiusunu

tapın .

- A) $O(5;-3)$, $r=4$ B) $O(5; 3)$, $r=5$ C) $O(5;-3)$, $r=5$
 D) $O(2; 6)$, $r=5$ E) $O(3; 1)$, $r=5$

Həlli: Mərkəzi $O(a; \delta)$ nöqtəsi, radiusu r olan çevrənin $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ tənliyinə əsasən

$$x-5 = x-a \Rightarrow a=5$$

$$y+3 = y-b \Rightarrow b=-3$$

$$r^2 = 25 \Rightarrow r=5 \text{ olur.}$$

Cavab: C

2. Mərkəzi $O(7; 5)$ nöqtəsi, diametri 16 sm olan çevrənin tənliyini yazın.

- A) $(x-7)^2 + (y+5)^2 = 64$ B) $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 49$ C) $(x+7)^2 + (y-5)^2 = 64$
 D) $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 64$ E) $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 64$

Həlli: Mərkəzi $O(a; \delta)$ nöqtəsində və radiusu r olan çevrənin $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ tənliyinə əsasən və $d = 2r$ olduğundan, $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 64$.

Cavab: D

3. $A(3; 4)$ nöqtəsi, $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 25$ tənliyi ilə verilmiş çevrə üzərindədir. A nöqtəsindən keçən diametrin digər üç nöqtəsi B -dir. B nöqtəsinin koordinatları cəmini tapın.

- A) 1 B) 2 C) 3 D) -2 E) -1

Həlli: B nöqtəsinin koordinatları $(x; y)$ olsun. Çevrənin mərkəzi diametrin orta nöqtəsidir. Çevrənin mərkəzinin koordinatları $(5; -2)$ olduğu üçün parçanın orta nöqtəsinin koordinatları düsturuna əsasən:

$$\frac{x+3}{2} = 5 \Rightarrow x+3=10 \Rightarrow x=7 \text{ və}$$

$$\frac{y+4}{2} = -2 \Rightarrow y+4=-4 \Rightarrow y=-8 \text{ onda}$$

$$x+y = 7+(-8) = -1$$

Cavab E

4. $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 25$ çevrəsinin bir vətəri Ox oxu üzərindədir. Bu vətərin uzunluğunu tapın.

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 12

Həlli: Vətərin üç nöqtələri, çevrənin Ox oxunu kəsdiyi nöqtələrdir. Bu nöqtələri tapaq. Bunun üçün çevrənin tənliyində $y = 0$ yazaq.

$$(x+2)^2 + (0-4)^2 = 25 \Rightarrow (x+2)^2 + 16 = 25 \Rightarrow (x+2)^2 = 9,$$

$$\text{buradan } x+2=3 \text{ və ya } x+2=-3$$

$$x_1=1 \quad x_2=-5$$

Onda vətərin uzunluğu $|x_1 - x_2| = |1 - (-5)| = 6$

Cavab: C

5. $x^2 + (y-3)^2 = 25$ tənliyi ilə verilmiş çevrənin mərkəzi ilə koordinat başlanğıcı arasındakı məsafəni tapın.

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) $\sqrt{2}$

Həlli: Çevrənin mərkəzi $O(0;3)$ nöqtəsidir. Bu nöqtə Oy oxu üzərindədir. Deməli, nöqtənin ordinatı axtarılan məsafədir.

Cavab: C

Çevrə tənliyinin x və y dəyişənlərinə görə ümumi iki dərəcəli tənlik şəklində göstərilməsi

Çevrənin tənliyini ümumi iki dərəcəli tənlik olan

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

şəklində yazmaq olar. Burada A, B və C əmsallarından heç olmasa biri sıfırdan fərqli olmalıdır.

Bu tənliyi $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ şəklinə gətirmək üçün, sonuncu tənliyi açaq:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Bu tənlikdə $-2a=D, -2b=E, a^2 + b^2 - r^2 = F$ olduğunu nəzərə alsaq, $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ şəklində olan çevrə tənliyini alırıq. Burada çevrə mərkəzinin koordinatları $O(a,b) =$

$O\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$, çevrənin radiusu

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - F} = \sqrt{\left(-\frac{D}{2}\right)^2 + \left(-\frac{E}{2}\right)^2 - F} = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} \quad \text{olar.}$$

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ tənliyində aşağıdakı hallar mümkündür:

1) $D^2 + E^2 - 4F > 0$ olarsa, bu çevrə tənliyidir.

2) $D^2 + E^2 - 4F = 0$ olarsa, bu nöqtəni bildirir.

3) $D^2 + E^2 - 4F < 0$ olarsa, belə çevrə yoxdur.

Göründüyü kimi $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ tənliyinin çevrə tənliyi olması üçün aşağıdakı şərtlər yerinə yetirilməlidir:

1. $C=0$, yəni xy həddi olmamalıdır.

2. $A=B$, yəni x^2 və y^2 -in əmsalları bərabər olmalıdır.

3. $D^2 + E^2 - 4F > 0$ olmalıdır.

Qeyd etmək lazımdır ki, $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ çevrə tənliyində

1. $F=0$ olarsa, çevrə koordinat başlanğıcından keçir.

2. $D^2 = 4F$ olarsa, çevrə OX oxuna toxunur.

3. $E^2=4F$ olarsa, çevrə OY oxuna toxunur.

4. $D^2=E^2=4F$ olarsa, çevrə OX və OY oxlarına toxunur.

NÜMUNƏLƏR:

1. $P(x_1; y_1)$ nöqtəsindən $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ çevrəsinə çəkilmiş toxunan parçanın uzunluğunu tapın.

A) 1 B) 15 C) 2 D) 2,5 E) 3

Həlli: $P(1;2)$ nöqtəsindən $x^2 + y^2 + x - y - 3 = 0$ çevrəsinə çəkilmiş toxunanın uzunluğu

$PA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F}$ düsturundan tapılır. Burada A toxunma nöqtəsidir. Onda $P(1;2)$

nöqtəsindən $x^2 + y^2 + x - y - 3 = 0$ çevrəsinə çəkilmiş toxunanın uzunluğu

$$PA = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1 - 2 - 3} = 1 \text{ -dir.}$$

Cavab: A

2. $A(1;-1)$ nöqtəsi $x^2 + y^2 - 4x + ay + 20 = 0$ çevrəsinin xaricindədirsə a -nın ($a > 0$) yerləşdiyi aralığı tapın.

A) $(-\infty; -8)$ B) $(-\infty; 18)$ C) $(8; 18)$ D) 18 E) $(8; +\infty)$

Həlli: Verilmiş nöqtənin çevrənin xaricində olması üçün $P > 0$ olmalıdır. Onda

$$P = x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 1 + 1 - 4 \cdot 1 + a \cdot (-1) + 20 > 0 \Rightarrow$$

$$-a + 18 > 0 \Rightarrow a < 18.$$

Digər tərəfdən verilmiş tənliyin çevrə tənliyi olması üçün $D^2 + E^2 - 4F > 0$ olmalıdır. Buradan

$$16 + a^2 - 4 \cdot 20 > 0 \Rightarrow a^2 > 64$$

$$\text{və } a \in (-\infty; -8) \cup (8; +\infty)$$

alırıq. Hər iki şərti nəzərə alsaq,

$$\begin{cases} 0 < a < 18 \\ a \in (-\infty; -8) \cup (8; +\infty) \end{cases} \Rightarrow a \in (8; 18)$$

Cavab: C

3. a -nın hansı qiymətində $A(-1;-3)$ nöqtəsi $x^2 + y^2 - 4ax + y - 4 = 0$ çevrəsi üzərində olar?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $-\frac{4}{3}$ D) $-\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

Həlli: Verilmiş nöqtənin çevrə üzərində olması üçün $P = x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0$ olmalıdır. Onda

$$P = (-1)^2 + (-3)^2 - 4a \cdot (-1) + (-3) - 4 = 0 \Rightarrow 1 + 9 + 4a - 3 - 4 = 0 \Rightarrow 4a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

Cavab:D

Toxunan və normalın tənliyi

1) $x^2 + y^2 = r^2$ çevrəsi üzərində bir $A(x_1; y_1)$ nöqtəsindən çəkilən toxunan $xx_1 + yy_1 = r^2$ -dir.

Toxunanın bucaq əmsalı $k_t = -\frac{x_1}{y_1}$ -dir. $A(x_1; y_1)$ nöqtəsində toxunana çəkilən perpendikulyar *normal* adlanır. Normal çevrə mərkəzindən keçir.

Normalın tənliyi $y = \frac{y_1}{x_1} \cdot x$, bucaq əmsalı $k_n = \frac{y_1}{x_1}$ -dir.

2) Tənliyi $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ şəklində verilmiş çevrənin $A(x_1, y_1)$ nöqtəsindən keçən toxunanın tənliyi

$$x_1x + y_1y + \frac{D}{2}(x + x_1) + \frac{E}{2}(y + y_1) + F = 0$$

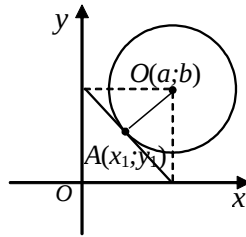
kimidir.

3) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ çevrəsi üzərində $A(x_1; y_1)$ nöqtəsindən çəkilən toxunanın tənliyi

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

və ya

$$(x - x_1)(x_1 - a) + (y - y_1)(y_1 - b) = 0$$



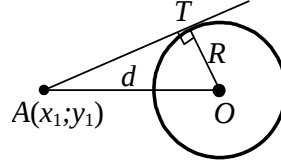
şəklindədir. Bu halda $A(x_1; y_1)$ nöqtəsindən çəkilən normalın tənliyi

$$(x - a)(y_1 - b) - (x_1 - a)(y - b) = 0,$$

bucaq əmsalı isə $k_n = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}$ -dir.

Nöqtə ilə çevrənin qarşılıqlı vəziyyəti

$A(x_1; y_1)$ nöqtəsi və $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ və ya $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ şəklində vermiş çevrə tənlikləri məlum olarsa, $A(x_1; y_1)$ nöqtəsinin çevrəyə görə dərəcəsi P_A ;
 $P_A = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2$ və ya $P_A = x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F$ kimi təyin olunur.



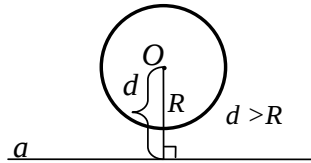
Burada $P_A > 0$ olarsa, A nöqtəsi çevrənin xaricində, $P_A = 0$ isə A nöqtəsi çevrənin üzərində, $P_A < 0$ olarsa, A nöqtəsi çevrənin daxilindədir. Qeyd edək ki, əgər A nöqtəsi çevrənin xaricində isə P_A -nin qiyməti A nöqtəsindən çevrəyə çəkilən toxunanın uzunluğunun kvadratına bərabərdir. Yəni $P_A = AT^2$ olar. Digər tərəfdən $AT^2 = d^2 - R^2 \Rightarrow P_A = d^2 - R^2$ -dir.

Düz xətlə çevrənin qarşılıqlı vəziyyəti

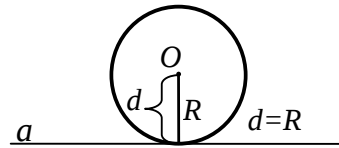
Düz xətt ilə çevrə aşağıdakı kimi qarşılıqlı vəziyyətlərdə ola bilər:

R - çevrə radiusu, d - çevrə mərkəzi ilə a düz xətti arasındakı məsafədir.

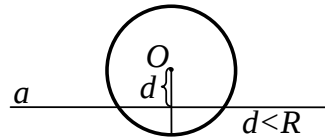
1. Düz xətlə çevrənin heç bir ortaq nöqtəsi yoxdur. Bu halda çevrənin mərkəzindən düz xəttə qədər olan məsafə çevrənin radiusundan böyükdür, yəni $d > R$.



2. Düz xəttin çevrə ilə ancaq bir ortaq nöqtəsi vardır. Bu halda düz xətt çevrəyə toxunan, ortaq nöqtə isə toxunma nöqtəsi adlanır, yəni $d = R$.



3. Düz xətlə çevrənin iki ortaq nöqtəsi vardır. Bu halda düz xətt çevrənin kəsəni adlanır və çevrə mərkəzindən düz xəttə qədər olan məsafə radiusdan kiçikdir, yəni $d < R$.



Qeyd edək ki, $x^2 + y^2 = r^2$ və $y = ax + b$ tənlikləri ilə verilmiş çevrə və düz xətt üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

a) Düz xətt çevrəyə toxunarsa,

$$r^2(1+a^2)-b^2=0$$

b) Düz xətt çevrə ilə iki müxtəlif nöqtədə kəsişirsə,

$$r^2(1+a^2)-b^2>0$$

c) Düz xətt çevrə ilə kəsişmirsə,

$$r^2(1+a^2)-b^2<0.$$

NÜMUNƏLƏR:

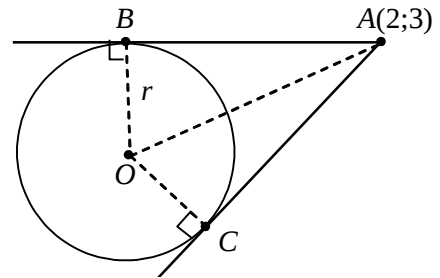
1. A (2;3) nöqtəsindən $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 1 = 0$ çevrəsinə çəkilmiş toxunan parçanın uzunluğunu tapın.

A) $5\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$ D) 4 E) 2

Həlli: $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 1 = 0$ çevrəsinin mərkəzi

$$O\left(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{2}\right) = O\left(\frac{3}{2}; -1\right), \text{ radiusu}$$

$$r = \frac{\sqrt{(-3)^2 + 2^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{\sqrt{9+4+4}}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2} - \text{dir.}$$



Şəkildən göründüyü kimi

$$OA = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 2\right)^2 + (-1 - 3)^2} = \frac{\sqrt{65}}{2}, OB = r = \frac{\sqrt{17}}{2} \text{ olduğundan, Düzbucaqlı OBA üçbucağından}$$

$$AB^2 = OA^2 - OB^2 = \frac{65}{4} - \frac{17}{4} = \frac{48}{4} = 12 \text{ və ya } AB = 2\sqrt{3} \text{ (Burada } AB = AC)$$

Cavab: C

2. $(x+1)^2 + (y-m)^2 = 4$ və $x^2 + (y-4)^2 = m^2$ çevrələri xaricdən toxunarlarsa, m - i tapın .

A) $\frac{13}{12}$ B) $\frac{11}{12}$ C) $-\frac{5}{4}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{7}{5}$

Həlli: $(x+1)^2 + (y-m)^2 = 4$ çevrəsinin mərkəzi $O_1(-1; m)$ və radiusu $r_1 = 2$ -dir.

$x^2 + (y-4)^2 = m^2$ çevrəsinin mərkəzi $O_2(0; 4)$ və radiusu $r_2 = m$ -dir. Xaricdən toxunan iki çevrənin mərkəzləri arasındakı məsafə radiusların cəminə bərabərdir:

$$r_1 + r_2 = O_1O_2$$

$$2 + m = \sqrt{(-1-0)^2 + (m-4)^2} \Rightarrow (2+m)^2 = 1 + (m-4)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + 4m + m^2 = 1 + m^2 - 8m + 16 \Rightarrow 12m = 13 \Rightarrow m = \frac{13}{12}$$

Cavab: A

3. $x^2 + y^2 - 4x + a = 0$ çevrəsinin $y = 2$ düz xəttinə toxunduğu məlumdursa, a -nı təyin edin.

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Həlli: $y = 2$ düz xətti $x^2 + y^2 - 4x + a = 0$ çevrəsinə toxunursa, bu tənliklər sisteminin həllində $D = 0$ olmalıdır. Verilmiş çevrə tənliyində $y = 2$ olduğunu nəzərə alaraq. Onda

$$x^2 + y^2 - 4x + a = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + a + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 16 - 4(a + 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 - 4a - 16 = 0 \Rightarrow a = 0.$$

Cavab: C

4. r -in hansı qiymətində $x^2 + (y - 1)^2 = r^2$ və $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 36$ çevrələri bir-birinə daxildən toxunurlar?

- A) 2,5 B) 2 C) 1,5 D) 1 E) 0,5

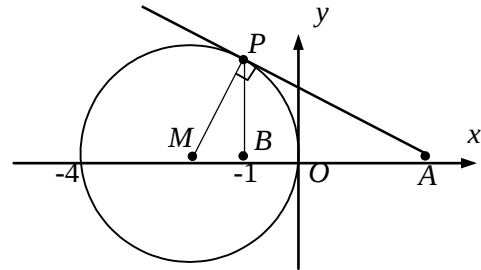
Həlli: $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 36$ çevrəsinin mərkəzi $O_2(-4; 4)$ radiusu 6, $x^2 + (y - 1)^2 = r^2$ çevrəsinin mərkəzi $O_1(0; 1)$ və radiusur –dir. Daxildən toxunan iki çevrənin isə mərkəzləri arasındakı məsafə onların radiusları fərqi mütəlak qiymətinə bərabərdir. Онда

$$O_1O_2 = \sqrt{(-4 - 0)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5 \text{ və } |6 - r| = 5 \Rightarrow r = 1 \text{ və ya } r = 11$$

Cavab: D

5. Şəkiləki M mərkəzli çevrə O yoxuna və AP düz xəttinə toxunandır. Verilənlərə görə AP düz xəttinin bucaq əmsalını tapın.

- A) $-\frac{2}{3}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$



Həlli: M mərkəzi çevrənin radiusu 2 $r = 4 \Rightarrow r = 2$, $MB = r - 1 = 2 - 1 = 1$ –dir. Düzbucaqlı PMB üçbucağında $PM = 2 \cdot MB$ olduğundan, $\angle PMB = 60^\circ$ –dir. Onda $\angle PAM = 30^\circ$ olur. Deməli, AP düz xəttinin absis oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucaq 150° , AP düz

xəttinin bucaq əmsalı $k_{AP} = \tan 150^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Cavab: B

6. $A(3;5)$ nöqtəsindən $3x-4y=7$ düz xəttinə qədər olan məsafəni tapın.

- A) 5 B) 6 C) 5,6 D) 6,5 E) 3,6

Həlli: $A(x_1; y_1)$ nöqtəsindən $ax+by+c=0$ düz xəttinə qədər olan məsafə düsturuna görə

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Burada verilmiş tənliyi $3x-4y-7=0$ şəklinə gətirərək $a=3$, $b=-4$, $c=-7$ və $x_1=3$, $y_1=5$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$d = \frac{|3 \cdot 3 - 4 \cdot 5 - 7|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{18}{5} = 3,6$$

olar.

Cavab: E

7. $2x-3y+11=0$ və $x+7y=20$ tənlikləri ilə verilən düz xətlərin kəsişmə nöqtələrini tapın.

- A) (1;3) B) (-1;3) C) (1;-3) D) (2;6) E) (-2;6)

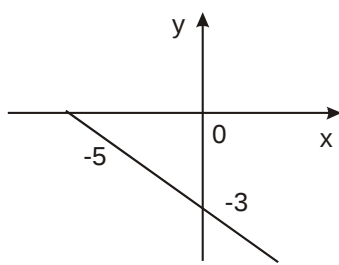
Həlli: Verilmiş düz xətlərin kəsişmə nöqtəsini tapmaq üçün $\begin{cases} 2x-3y+11=0 \\ x+7y-20=0 \end{cases}$ tənliklər sistemini həll etmək lazımdır:

$$\begin{cases} 2x-3y+11=0 \\ x+7y-20=0 \end{cases} \begin{matrix} \\ (-2) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y+11=0 \\ -2x-14y+40=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -17y=-51 \\ x=-7y+20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow (-1;3)$$

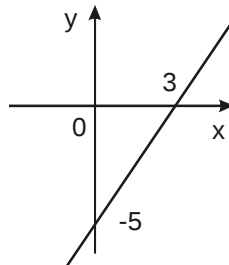
Cavab: B

8. $3x+5y+15=0$ tənliyi ilə verilmiş düz xəttin qrafiki hansıdır?

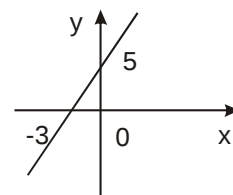
A)



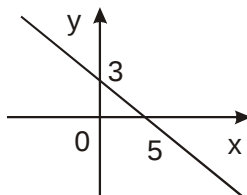
B)



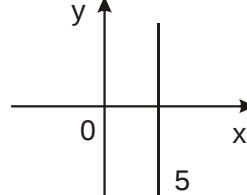
C)



D)



E)



Həlli: Düz xəttin qrafikini tapmaq üçün onun koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini tapmaq:

$$x=0 \text{ olduqda } 3 \cdot 0 + 5y + 15 = 0$$

$$5y = -15$$

$$y = -3$$

Deməli, düz xəttin ordinat oxu ilə kəsişmə nöqtəsi (0;-3)-dür.

$$Y=0 \text{ olduqda } 3x + 5 \cdot 0 + 15 = 0$$

$$3x = -15$$

$$x = -5$$

Deməli, düz xəttin absis oxu ilə kəsişmə nöqtəsi (-5;0)-dir.

Beləliklə, axtarılan düz xətt (0;-3) və (-5;0) nöqtələrindən keçir.

Cavab: A

9. Mərkəzi $O(2;5)$ nöqtəsi olan çevrənin toxunanlarından biri $y = \frac{12}{5}x + \frac{27}{5}$ tənliyi ilə verilmiş düz xətdir. Bu çevrənin radiusunu tapın.

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Həlli: Məlumdur ki, toxunma nöqtəsində radius toxunan düz xəttə perpendikulyardır. Deməli,

$O(2;5)$ nöqtəsindən $y = \frac{12}{5}x + \frac{27}{5}$ toxunan düz xəttə qədər olan məsafə radiusa bərabərdir.

Verilmiş düz xətti $12x - 5y + 27 = 0$ şəklinə gətirək. Onda

$$r = \frac{|12 \cdot 2 - 5 \cdot 5 + 27|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{|24 - 25 + 27|}{\sqrt{169}} = \frac{26}{13} = 2$$

alırıq.

Cavab: B

10. $y = x + 3$ və $x + y = 5$ düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsindən keçən və $4x - y - 2 = 0$ düz xəttinə paralel olan düz xəttin tənliyini yazın.

- A) $y = 4x + 1$ B) $y = 4x - 3$ C) $y = -4x + 1$ D) $y = -4x + 3$ E) $y = 4x$

Həlli: Düz xətlərin kəsişmə nöqtəsini tapaq:

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow (1; 4)$$

Axtarılan düz xətt $4x - y - 2 = 0$ düz xəttinə paraleldir. Deməli bu düz xətlərin bucaq əmsalları bərabərdir. Onda $4x - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 4x - 2 \Rightarrow k = 4$

Bir nöqtəsi və bucaq əmsalı məlum olan düz xəttin tənliyinə əsasən

$$y - 4 = 4(x - 1)$$

$$y - 4 = 4x - 4$$

$$y = 4x$$

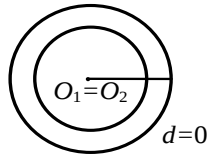
alırıq.

Cavab: E

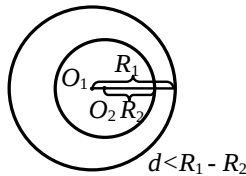
İki çevrənin qarşılıqlı vəziyyəti

Mərkəzləri O_1 və O_2 , radiusları R_1 və R_2 ($R_1 > R_2$) olan iki çevrənin mərkəzləri arasında məsafə d olarsa, onlar bir-biri ilə aşağıdakı qarşılıqlı vəziyyətlərdə ola bilər:

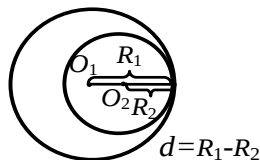
1. Çevrələrdən biri digərinin daxilində yerləşir və onların mərkəzləri üst-üstə düşür (konsentrik çevrələr). Bu halda $d=0$.



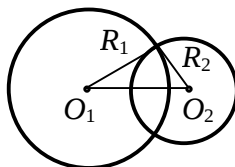
2. Çevrələr biri digərinin daxilində yerləşməklə toxunurlar və mərkəzləri üst-üstə düşür. Bu halda $d < R_1 - R_2$.



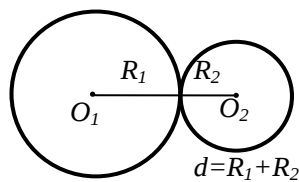
3. Çevrələr biri digərinin daxilində yerləşməklə toxunurlar. Bu halda $d = R_1 - R_2$. Çevrələrin toxunma nöqtəsi mərkəzləri birləşdirən düz xətt üzərindədir.



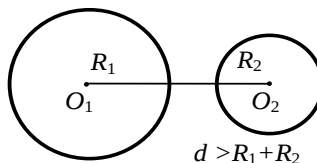
4. Çevrələr bir-biri ilə kəsişirlər. Bu halda $R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$ olur.



5. Çevrələr xaricdən toxunurlar. Bu halda $d = R_1 + R_2$. Toxunma nöqtəsi O_1O_2 üzərindədir.

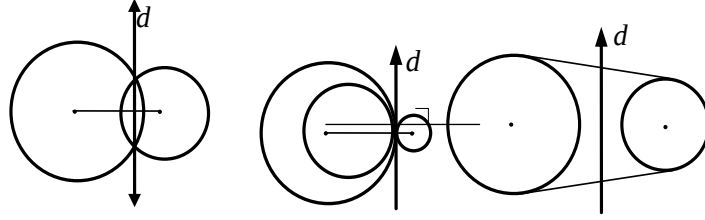


6. Çevrələr bir-birinin xaricindədirlər. Bu halda $d > R_1 + R_2$ olur.



Verilən iki çevrənin radikal oxu

İki çevrəni nəzərdən keçirək. Bu çevrələrə görə dərəcələri eyni olan bütün nöqtələr çoxluğu verilmiş çevrələrin radikal oxu adlanır. Əgər çevrələr konsentrikdirsə, belə ox yoxdur. Konsentrik olmayan iki çevrənin radikal oxunu müəyyən edək. Çevrələr şəkildə göstərildiyi kimi olarsa, d düz xətti verilən iki çevrənin radikal oxu olur.



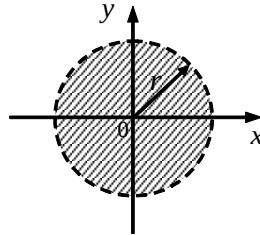
Çevrələrin tənliklərini tərəf-tərəfə çıxsaq d düz xəttinin tənliyini alarıq:

$$\left. \begin{aligned} \text{I: } x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 &= 0 \\ \text{II: } x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

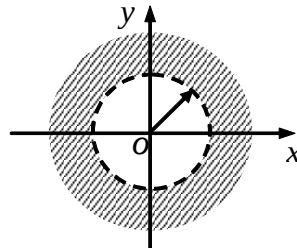
$$\text{III: } (D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) = 0$$

Çevrənin koordinat müstəvisində ayırdığı hissələrin bərabərsizlik şəklində göstərilməsi

1. $x^2 + y^2 < r^2$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğu mərkəzi $O(0;0)$ nöqtəsində yerləşən və radiusu r olan dairənin daxili hissəsini ifadə edir.

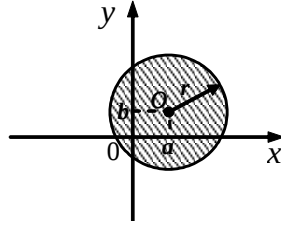


2. $x^2 + y^2 > r^2$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğu, mərkəzi $O(0;0)$ nöqtəsində yerləşən və radiusu r olan dairənin xarici hissəsini ifadə edir.

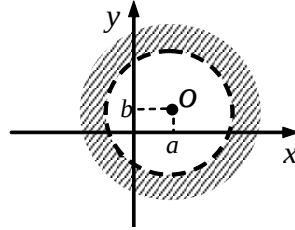


3. $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğu, mərkəzi $O(a;b)$ nöqtəsində

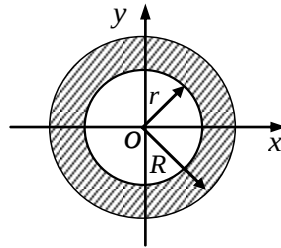
yerləşən və radiusu r olan çevrə üzərindəki nöqtələri və dairənin daxili hissəsini ifadə edir.



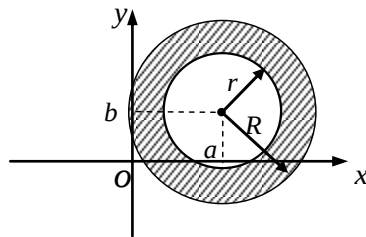
4. $(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğu, mərkəzi $O(a;b)$ nöqtəsində yerləşən və radiusu r olan dairənin xarici hissəsini ifadə edir.



5. $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğu, mərkəzi $O(0;0)$ nöqtəsində yerləşən, radiusları r və R olan dairə halqasını ifadə edir.



6. $r^2 \leq (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğu, mərkəzi $O(a;b)$ nöqtəsində yerləşən, radiusları r və R olan dairə halqasını ifadə edir.



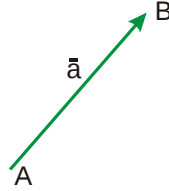
6. VEKTORLAR VƏ ONLAR ÜZƏRİNDƏ ƏMƏLLƏR

Əsas anlayışlar

Texniki elmlərin öyrənilməsində ədədi qiyməti ilə tam təyin olunan kəmiyyətlərə çox rast gəlinir. Uzunluq, sahə, həcm, kütlə temperatur və s. belə kəmiyyətlərdir. Bunlara skalyar kəmiyyətlər deyilir.

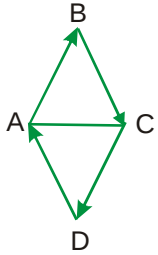
Elə kəmiyyətlər də var ki, onlar tam qiyməti ilə deyil qiymət və istiqaməti ilə təyin olunur. Qüvvə, sürət, təcil və s. belə kəmiyyətlərdir. Bunlara vektorial kəmiyyətlər deyilir. Vektorial kəmiyyətlər vektor işarəsi vasitəsi ilə göstərilir.

Başlanğıc nöqtəsi A, son nöqtəsi B olan istiqamətlənmiş düz xətt parçasına $\overline{AB}$ və ya $\vec{a}$ vektoru deyilir. $\vec{a}$ vektorunun uzunluğuna onun modulu deyilir və $|\vec{a}|$ kimi yazılır.



$|\vec{a}| = 1$ olduqda $\vec{a}$ vahid vektor adlanır.

Eyni və ya paralel düz xətlər üzərində olan vektorlara kollinear vektorlar deyilir. Şəkildəki $\overline{AB}$ ilə $\overline{SD}$ və $\overline{BC}$ ilə $\overline{DA}$ kollineardırlar.



Uzunluqları və istiqamətləri eyni olan vektorlar bərabərdirlər:

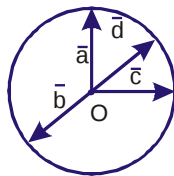
$$\overline{AB} = \overline{DC}$$

Uzunluqları eyni, istiqamətləri əks olan vektorlara əks vektorlar deyilir. $\overline{BC}$ və $\overline{DA}$ əks vektorlardır. $\overline{BC} = -\overline{CB}$ olduğundan, $\overline{BC}$ ilə $\overline{CB}$ əks vektorlardır.

Vektoru paralel köçürməklə onun başlanğıcını istənilən nöqtəyə köçürmək olar. Bu halda həmin vektor sərbəst vektor adlanır.

Nümunə:

Çevrənin radiusu üzərindəki vektorlardan hansılar bərabərdirlər? $\vec{b}$ ilə $\vec{d}$ əks vektorlardır.

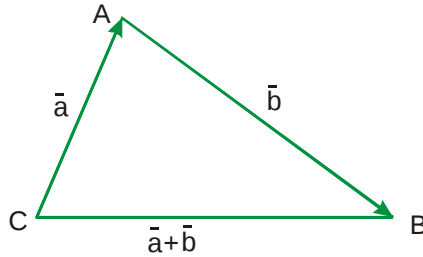


Cavab: $\vec{a} \neq \vec{b} \neq \vec{c} \neq \vec{d}$

Eyni və ya paralel müstəvilər üzərində olan vektorlara komplanar vektorlar deyilir. Şəkildəki $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ və $\vec{d}$ vektorları komplanardırlar.

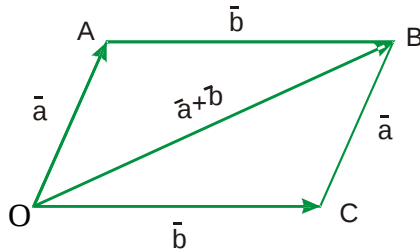
Vektorlar üzərində xətti əməllər

Vektorlar üzərində xətti əməllər dedikdə onların toplanması, çıxılması və vektorun ədədə vurulması başa düşülür.



İxtiyari O nöqtəsindən $\vec{OA} = \vec{a}$ və sonra A nöqtəsindən $\vec{AB} = \vec{b}$ vektorunu ayırıq. Birinci vektorun başlanğıcı ilə ikinci vektorun sonunu birləşdirən $\vec{OB}$ vektoruna bu vektorların cəmi deyilir. Buna vektorların toplanması üçün üçbucaq üsulu deyilir.

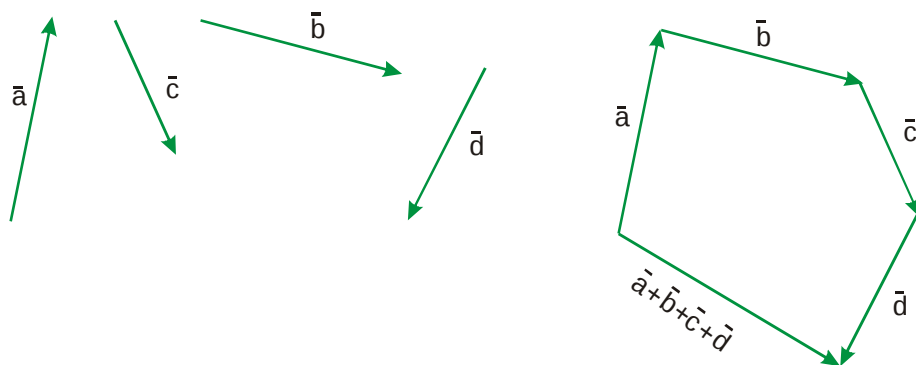
Vektorların toplanmasında paraleloqram üsulu adlanan aşağıdakı üsuldən də çox istifadə olunur.



Bunun üçün tərəfləri $\vec{OA} = \vec{a}$ və $\vec{AB} = \vec{b}$ vektorları olan paraleloqram qurulur: $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB}$

Toplananların sayı ikidən çox olduqda aşağıdakı qayda ilə onları toplamaq əlverişlidir.

İxtiyari O nöqtəsindən başlayaraq $\vec{a}$ vektoruna bərabər vektor qurulur. Sonra isə şəkildə göstəriləndiyi kimi birincinin sonu, ikincinin başlanğıcı, ikincinin sonu, üçüncünün başlanğıcı və c. Bu qayda ilə bütün toplanan vektorlar qurulur.

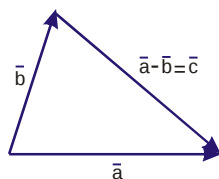


Birinci vektorun başlanğıcını, sonuncu vektorun sonu ilə birləşdirən vektor bu vektorların cəmi olur. Toplananların hansı ardıcılıqla və necə qruplaşdırılmasından asılı olmayaraq cəm vektor eyni olacaq. Bu isə vektorların toplanmasının yerdəyişmə və qruplaşdırma xassəsinə malik olduğunu göstərir.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

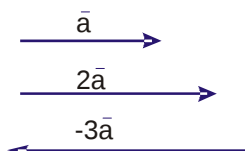
$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

İki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorunun fərqi elə $\vec{c}$ vektoruna deyilir ki, onu $\vec{b}$ ilə topladıqda $\vec{a}$ -nı versin.



İki vektorun fərqi taparkən, fərq vektorun başlanğıcının çıxılan vektorun sonuna düşdüyünə diqqət edin. $|\vec{a}|$ vektorunun həqiqi λ ədədinə hasili, uzunluğu $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, istiqaməti $\lambda > 0$ olduqda onunla eyni $\lambda < 0$ olduqda isə onun əksinə olan vektora deyilir. Yəni ,

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}$$



Şəkildə $\overline{AB} = 2\vec{a}$, $\overline{CD} = (-3) \cdot \vec{a}$ göstərilmişdir. $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ vektorların kollinearlıq şərtidir.

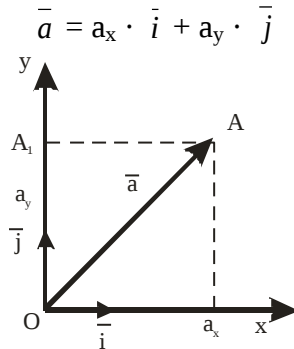
İstənilən vektoru $\vec{a} = \vec{a}_0 \cdot |\vec{a}|$ şəkildə göstərmək olar. Buradan

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad \text{təyin olunur.}$$

Burada $\vec{a}_0$ vahid vektordur

Vektorun koordinatları

Şəkildə olduğu kimi $\vec{a}$ vektorunun başlanğıcı koordinat başlanğıcı ilə üst-üstə düşdükdə onu

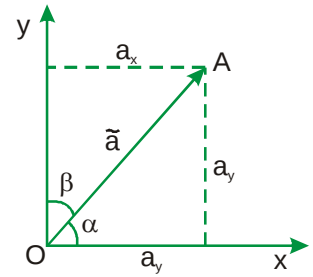


şəklində yazmaq olar. Vektorun bu şəkildə yazılışına, onun oxlar üzrə (ort vektorlara) ayrılışı deyilir. Vektorun koordinat oxları üzərindəki proyeksiyaları a_x və a_y onun koordinatları adlanır.

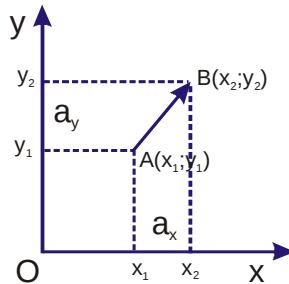
$\vec{i}$, $\vec{j}$ koordinat oxları üzərindəki vahid (ort) vektorlarıdır. $a_x \vec{i}$ və $a_y \vec{j}$ vektorları $\vec{a}$ vektorunun təşkilediciləri (komponentləri) adlanır. $\vec{a}$ vektorunun uzunluğu $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ ilə hesablanır.

$$\frac{a_x}{|\vec{a}|} = \cos\alpha, \quad \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \cos\beta \Rightarrow \cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$$

$\vec{a}$ vektorunun yönəldici kosinuslarıdır. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$



Başlanğıcı $A(x_1; y_1)$, sonu $B(x_2; y_2)$ nöqtəsində olan $\overline{AB}$ üçün



$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1$$

və ya $\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$ olur.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ilə vektorun uzunluğu (iki nöqtə arasındakı məsafə) tapılır.

Koordinatları ilə verilən vektorlar üzərində əməllər

$$\vec{a} = \{a_x, a_y\}, \vec{b} = \{b_x, b_y\} \text{ isə } \vec{a} + \vec{b} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + b_x \vec{i} + b_y \vec{j} = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x) \vec{i} + (a_y - b_y) \vec{j}$$

$$\lambda \vec{a} = \lambda(a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j}$$

NÜMUNƏ:

$$\vec{a} = \{2; -1\}, \vec{b} = \{3; 2\} \text{ isə } \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \text{ və } 5\vec{a} \text{ vektorlarını tapın.}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (2+3) \vec{i} + (-1+2) \vec{j} = 5\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (2-3) \vec{i} + (-1-2) \vec{j} = -\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$5\vec{a} = 5 \cdot (2\vec{i} - \vec{j}) = 10\vec{i} - 5\vec{j}$$

Skalyar hasil

$\vec{a}$ ilə $\vec{b}$ vektorunun skalyar hasili

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$$

ədədinə deyilir.

Xassələri:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0 \text{ və ya } \vec{b} = 0 \text{ və ya } \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$$

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = 0,$$

$\vec{a} = \{a_x; a_y\}, \vec{b} = \{b_x; b_y\}$ koordinatları ilə verilmiş vektorların skalyar hasili

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$ ilə hesablanır.

NÜMUNƏ:

$\vec{a} = \{2; 3\}$ və $\vec{b} = \{-3; 1\}$ isə $\vec{a} \cdot \vec{b}$ -ni tapın.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 = -6 + 3 = -3$$

Vektorların koordinat oxları üzrə ayrılışı

İxtiyari $\vec{a}$ vektorunu $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ kimi ifadə etmək olar. Burada $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorları vahid uzunluqlu vektorlar olub $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ bazis (ort) vektorlar adlanır.

Vektorların bu şəkildə yazılışına onun koordinat oxları üzrə ayrılışı deyilir.

Həqiqətən də, $\vec{a} = \overline{OA_x} + \overline{OA_y} + \overline{OA_z} = a_x \vec{j} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$

Bir vektorun digər vektor üzərindəki proyeksiyası

$\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ və $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ verilmiş vektorlar olarsa, onda $\vec{a}$ vektorunun $\vec{b}$ vektoru üzərindəki proyeksiyası aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Verilmiş vektorla kollinear olan vahid vektorun koordinatlarının tapılması

$\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ verilmiş vektor və $\vec{b}$ ona kollinear olan vahid vektor ($|\vec{b}| = 1$) olarsa,

$$\begin{aligned} 1. \quad \vec{a} \uparrow \vec{b} &\Rightarrow \vec{b} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}, \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \frac{a_z}{|\vec{a}|} \right) = \left(\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \right) \\ 2. \quad \vec{a} \downarrow \vec{b} &\Rightarrow \vec{b} = -\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(-\frac{a_x}{|\vec{a}|}, -\frac{a_y}{|\vec{a}|}, -\frac{a_z}{|\vec{a}|} \right) = \left(-\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, -\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, -\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \right) \end{aligned}$$

NÜMUNƏLƏR:

1. $\vec{a}(2; 1)$, $\vec{b}(3; -5)$ olarsa, $2\vec{a} + 3\vec{b}$ vektorunun uzunluğunu tapın.

A) $3\sqrt{2}$ B) $5\sqrt{2}$ C) $10\sqrt{2}$ D) $13\sqrt{2}$ E) $15\sqrt{2}$

Həlli: $2\vec{a} = 2(2; 1) = (4; 2)$

$$3\vec{b} = 3(3; -5) = (9; -15)$$

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = (9 + 4; -15 + 2) = (13; -13)$$

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{13^2 + (-13)^2} = 13\sqrt{2}$$

Cavab: D

2. $\vec{a}(x;2-1)$ və $\vec{b}(1;0;6)$ vektorları perpendikulyar isə, x-i tapın.

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Həlli:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \text{ isə } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot x + 2 \cdot 0 - 1 \cdot 6 = 0$$

$$x - 6 = 0$$

$$x = 6$$

Cavab: C

3. $\vec{a}(4;5)$ və $\vec{b}(3;-2)$ isə, vektorların skalyar hasilini tapın.

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Həlli:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 4 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) = 2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$$

Cavab: B

4. $\vec{a}(3;-3)$ və $\vec{b}(0;1)$ isə, iki vektor arasındakı bucağı tapın.

- A) 30^0 B) 45^0 C) 60^0 D) 90^0 E) 135^0

$$\textbf{Həlli: } \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{(3;-3) \cdot (0;1)}{\sqrt{3^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ və } \alpha = 135^0$$

Cavab: E

5. $\vec{a}(-3;4)$, $\vec{b}(a;7)$ və $\vec{a} \parallel \vec{b}$ olarsa, a-nı tapın.

- A) -5 B) $-\frac{21}{2}$ C) $-\frac{21}{4}$ D) $-\frac{25}{4}$ E) -6

$$\textbf{Həlli: } \vec{a} \parallel \vec{b} \text{ isə, } \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \Rightarrow \frac{-3}{a} = \frac{4}{7}$$

$$4a = -21$$

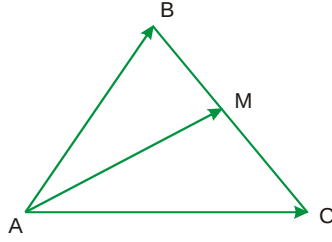
$$a = -\frac{21}{4}$$

Cavab: C

6. $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} + 4\vec{k}$, $\overrightarrow{AC} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ vektorları ABC üçbucağının tərəfləridir. AM medianının uzunluğunu tapın.

- A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{2}$

Həlli: Şəkildən göründüyü kimi

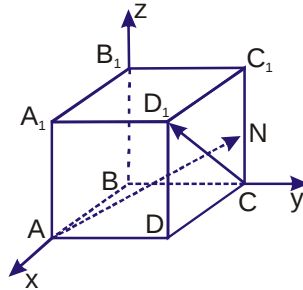


$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} = \frac{2\vec{i} - 2\vec{j} + 8\vec{k}}{2} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k} \Rightarrow |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Cavab:C

7. AD_1 – düzbucaqlı paralelepiped, $AB=a$, $AD=2a$, $AA_1=2a$ və N nöqtəsi CC_1 – tilinin orta nöqtəsi isə CD_1 ilə AN düz xətləri arasındakı bucağın kosinusu nəyə bərabərdir?

- A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{1}{\sqrt{30}}$ D) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ E) $\frac{1}{\sqrt{15}}$



Həlli:

Paralelepiped düzbucaqlı koordinat sistemində şəkildə göstərildiyi kimi yerləşdirsək $A(a; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(0; 2a; 0)$, $D_1(a; 2a; 2a)$, $N(0; 2a; a)$ olar. SD_1 və AN çarpaz düz xətləri arasındakı bucaq $\overrightarrow{CD_1}(a; 0; 2a)$ və $\overrightarrow{AN}(-a; 2a; a)$ arasındakı bucaq olduğundan,

$$\cos(\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AN}) = \frac{a \cdot (-a) + 0 \cdot 2a + 2a \cdot a}{\sqrt{a^2 + 4a^2} \cdot \sqrt{a^2 + 4a^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

Cavab: C

7. STEREOMETRİYA

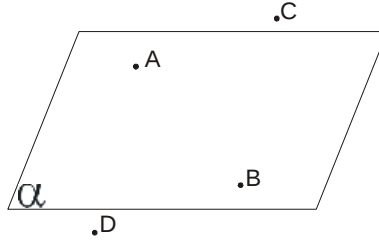
Stereometriya-həndəsənin fəza fiqurlarının xassələrini öyrənən bölməsidir.

Fəzada düz xətlər və müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyəti

Stereometriyanın aksiomları

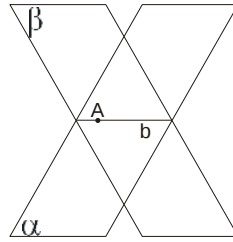
Stereometriyanın aşağıdakı aksiomları vardır.

1. İxtiyari müstəviyə aid olan nöqtələr və ona aid olmayan nöqtələr var.



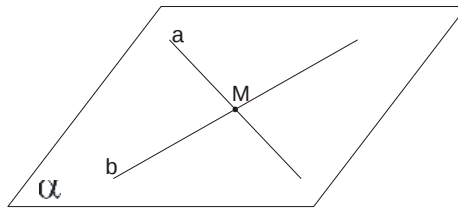
Şəkildə $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \notin \alpha$, $D \notin \alpha$.

2. İki müxtəlif müstəvinin bir ortaq nöqtəsi varsa, onlar bu nöqtələrdən keçən düz xətt boyunca kəsişirlər



Yəni $A \in \alpha, A \in \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha \cap \beta = b \\ A \in b \end{cases}$

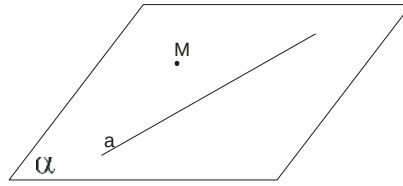
3. Kəsişən iki düz xətdən yalnız bir müstəvi keçirmək olar.



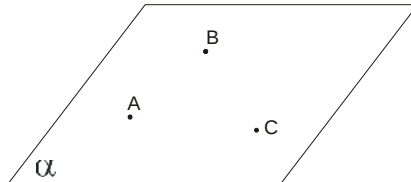
Müstəvinin varlığına aid teoremlər.

Verilmiş aksiomanın köməyi ilə aşağıdakı teoremləri isbat etmək olar.

Teorem: Bir düz xətt və onun üzərində olmayan nöqtələrdən bir və yalnız bir müstəvi keçirmək olar.

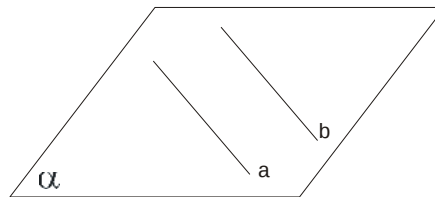


Teorem: Bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtədən bir və yalnız bir müstəvi keçirmək olar.



yəni ixtiyari A, B, C nöqtələri üçün $A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha$ şərtini ödəyən yeganə α müstəvisi vardır.

Teorem: İki paralel düz xətdən bir, yalnız bir müstəvi keçirmək olar.

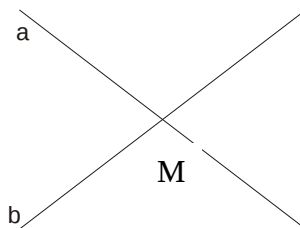


Fəzada düz xətlərin qarşılıqlı vəziyyəti

Fəzada düz xətlər kəsişə bilər.

Tərif: Fəzada iki düz xəttin yalnız bir ortaq nöqtəsi varsa. Bu düz xətlər kəsişirlər.

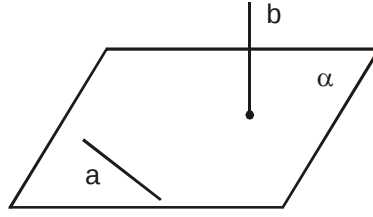
Şəkildə $a \cap b = M$ olduğundan bu düz xətlər kəsişirlər.



Tərif: Bir müstəvi keçirə bilən və ortaq nöqtəsi olmayan və ya üst-üstə düşən iki düz xəttə paralel düz xətlər deyilir.

Yəni $a \subset \alpha, b \subset \alpha, a \cap b = \emptyset \Rightarrow a \parallel b$

Tərif: Bir müstəvi keçirilə bilməyən və ortaq nöqtəsi olmayan iki düz xəttə çarpaz düz xətlər deyilir.

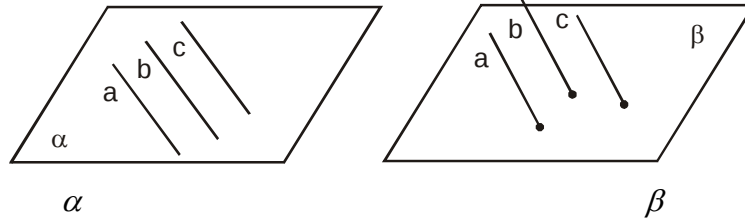


avə b düz xətlərinin çarpaz olması $\bullet$ işarəsi ilə göstərilir.

Şəkildə $a \subset \alpha, b \not\subset \alpha, a \cap b = \emptyset \Rightarrow a \bullet b$.

Düz xətlərin paralellik əlamətləri

Teorem: İki düz xətt üçüncü düz xəttə paraleldirsə, özləri də paraleldir.



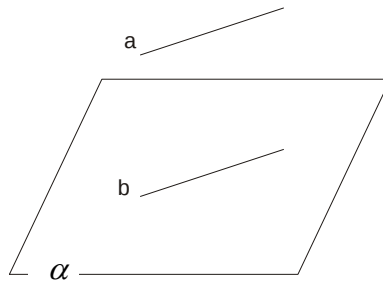
Yəni $\begin{cases} a // c \\ b // c \end{cases} \Rightarrow a // b$

Paralel düz xətlər və müstəvilər

Tərif: Düz xətlə müstəvinin ortaq nöqtəsi yoxdursa, belə düz xəttə müstəviyə paralel düz xətt deyilir. .

a düz xəttinin α müstəvisinə paralelliyi belə yazılır $a // \alpha$.

Teorem (Düz xətt və müstəvinin paralellik əlaməti). Düz xətt müstəvi üzərindəki hər hansı düz xətlə paraleldirsə, onda həmin düz xətt müstəviyə də paraleldir.



Teoremi qısaca olaraq belə yazmaq olar: $\begin{cases} a // c \\ b \subset c \end{cases} \Rightarrow a // b$

Bu teoremin tərsi də doğrudur.

Müstəvinin qarşılıqlı vəziyyəti

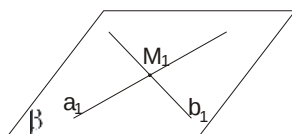
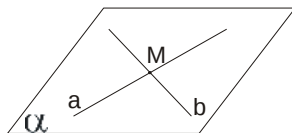
İki müstəvi aşağıdakı qarşılıqlı vəziyyətdə ola bilər:

1. İki müstəvinin bir ortaq nöqtəsi var. Belə müstəvilər həmin nöqtədən keçən düz xətt boyunca kəsişirlər. .
2. İki müstəvinin heç bir orta nöqtəsi yoxdur.

3. İki müstəvinin bir düz xətt üzərində olmayan üç ortaq nöqtəsi var. Belə müstəvilər üst-üstə düşür.

Tərif: Ortaq nöqtəsi olmayan və üst-üstə düşən müstəvilərə paralel müstəvilər deyilir. α və β müstəvilərinin paralelliyi $\alpha // \beta$ kimi işarə olunur.

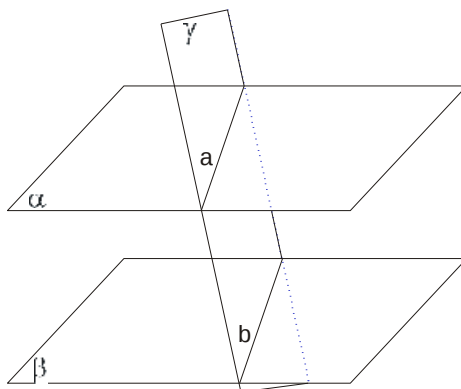
Teorem: (iki müstəvinin paralellik əmsalı). Bir müstəvinin iki kəsişən düz xətti uyğun olaraq, o biri müstəvinin iki kəsişən düz xəttinə paraleldirsə, onda həmin müstəvilər paraleldir.



$$\begin{cases} a, b \subset \alpha; a \cap b = M \\ a // a_1 // b_1; a_1, b_1 \subset \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha // \beta$$

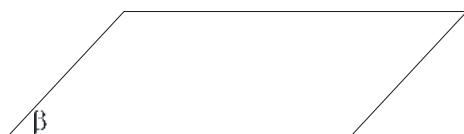
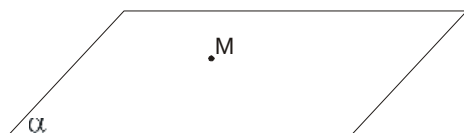
Paralel müstəvilərin xassələri

Teorem: İki paralel müstəvi üçüncü müstəvi ilə kəsişərsə, onda onların kəsişmə xətləri paraleldir.

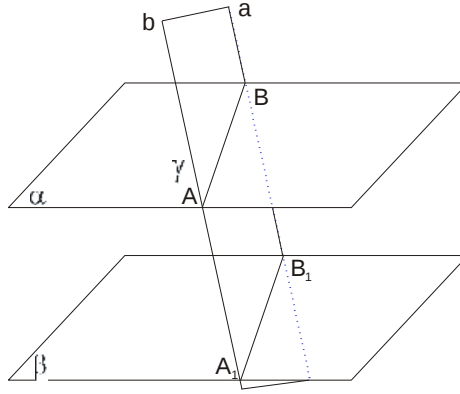


Yəni $\alpha // \beta, \alpha \cap \gamma = a, \beta \cap \gamma = b \Rightarrow a // b$.

Teorem: Müstəvi üzərində olmayan nöqtədən bu müstəviyə yalnız bir paralel müstəvi keçirmək olar.



Teorem: İki paralel müstəvi arasında olan paralel düz xətt parçaları bərabərdir.

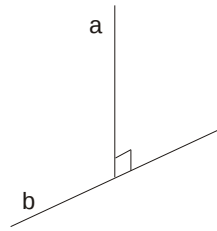


Yəni

$$\begin{cases} \alpha \parallel \beta, AA_1 \parallel BB_1 \\ \alpha \cap \gamma = AB, \beta \cap \gamma = A_1B_1 \end{cases} \Rightarrow AA_1 \parallel BB_1$$

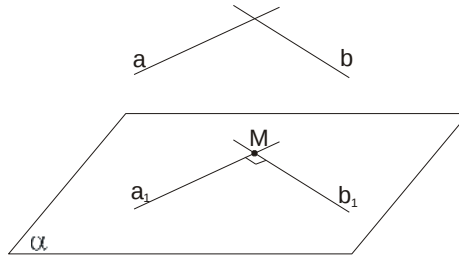
Fəzada düz xətlərin perpendikulyarlığı

Tərif: Fəzada düz bucaq altında kəsişən iki düz xəttə perpendikulyar düz xətlər deyilir.



Müstəvi üzərində olduğu kimi a və b düz xətlərinin perpendikulyarlığı $a \perp b$ kimi işarə olunur.

Teorem: Kəsişən iki düz xətt uyğun olaraq perpendikulyar iki düz xəttə paralel olarsa, onda onlar da perpendikulyardır.



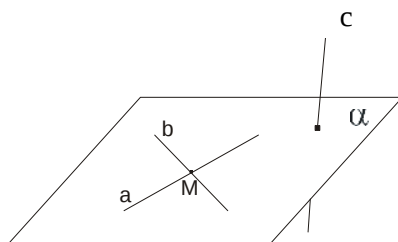
$$\begin{cases} a_1 \perp b_1, a_1 \cap b_1 = M \\ a \parallel a_1, b \parallel b_1 \end{cases} \Rightarrow a \perp b$$

Düz xətlə müstəvinin perpendikulyarlıq əlamətləri

Tərif: düz xətt müstəvi üzərində yerləşən hər bir düz xətlə bucaq əmələ gətirirsə, onda bu düz xətt müstəviyə perpendikulyardır.

a düz xətti və α müstəvisinin perpendikulyarlığı $a \perp \alpha$ kimi işarə olunur.

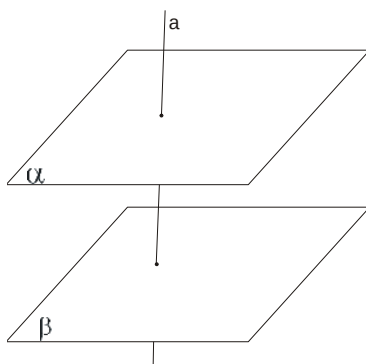
Teorem: Düz xətt müstəvi üzərindəki iki kəsişən düz xəttin hər biri ilə düz bucaq əmələ gətirirsə, düz xətt həmən müstəviyə perpendikulyardır.



Yəni :

$$\begin{cases} a, b \subset \alpha, a \cap b = M \\ c \perp a, c \perp b \end{cases} \Rightarrow c \perp \alpha$$

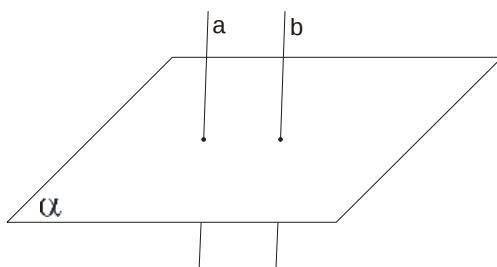
Teorem: Eyni düz xəttə perpendikulyar olan iki müstəvi paraleldir. Yəni $\alpha \perp a, \beta \perp a \Rightarrow \alpha \parallel \beta$



Tərs teorem: Paralel müstəvilərdən biri hər hansı düz xəttə perpendikulyardır, digər müstəvi də həmin düz xəttə perpendikulyardır:

$$\alpha \parallel \beta, \alpha \perp a \Rightarrow \beta \perp a$$

Teorem: Əgər iki düz xətt eyni müstəviyə perpendikulyarsa, onda həmin düz xətlər $a \perp \alpha, b \perp \alpha \Rightarrow a \parallel b$



Tərs teorem. Paralel düz xətlərdən biri hər hansı müstəviyə perpendikulyardır, digər düz xətt də həmin müstəviyə perpendikulyardır.

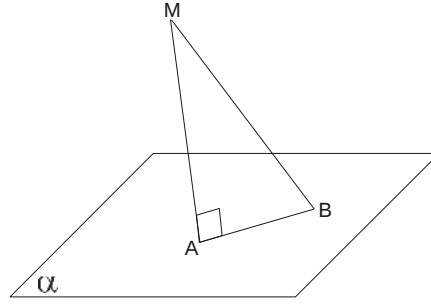
$$a \parallel b, a \perp \alpha \Rightarrow b \perp \alpha$$

Perpendikulyar və maillər

Tərif: Müstəvi xaricində görülmüş nöqtədən bu müstəviyə çəkilmiş perpendikulyarın müstəviyə qədər olan parçasına verilmiş nöqtədən verilmiş müstəviyə çəkilmiş perpendikulyar deyilir.

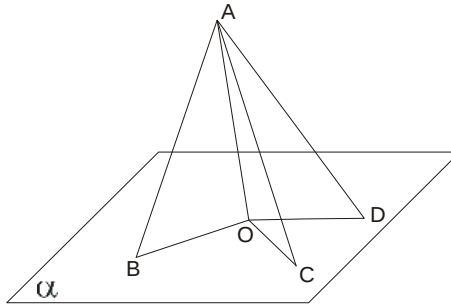
Tərif: Müstəvinə kəsən, lakin ona perpendikulyar olmayan düz xəttə mail deyilir.. α müstəvisi üzərində olmayan M nöqtəsindən bu müstəviyə MA perpendikulyarı, MB maili

çəkilərsə və A perpendikulyarın, B mailin oturacağı olarsa, onda AB parçasına BM mailinin α müstəvisi üzərindəki proyeksiyası deyilir.



Teorem: Müstəvi xaricindəki nöqtədən (A) müstəviyə perpendikulyar (AO) və maillər (AB, AC, AD) çəkilərsə:

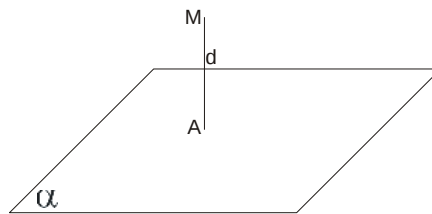
1. Perpendikulyar ixtiyari maıldən qısadır, yəni: $AO < AB, AO < AC, AO < AD$.
2. Proyeksiyaları bərabər olan maillər bərabərdir, yəni $OB = OC \Rightarrow AB = AC$.
3. İki maıldən proyeksiyaları böyük olan mail böyükdür $OD > OB \Rightarrow AD > AB$.



Nöqtədən müstəviyə qədər məsafə

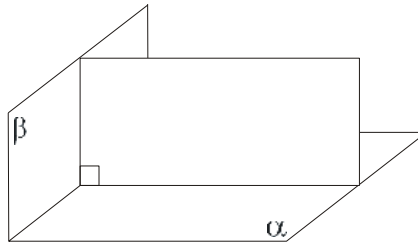
Tərif: Verilmiş nöqtədən verilmiş müstəviyə qədər çəkilmiş perpendikulyarın uzunluğuna nöqtədən müstəviyə qədər olan məsafə deyilir.

Şəkildə $AM = d$, M nöqtəsindən α müstəvisinə qədər olan məsafədir



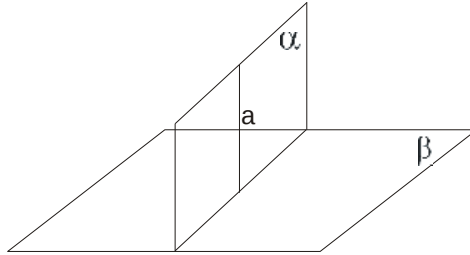
Perpendikulyar müstəvilər

Tərif: İki kəsişən müstəvinin kəsişmə xəttinə perpendikulyar olan üçüncü müstəvi onları perpendikulyar düz xətlər üzrə kəsərsə, onda müstəvilərə perpendikulyar müstəvilər deyilir.

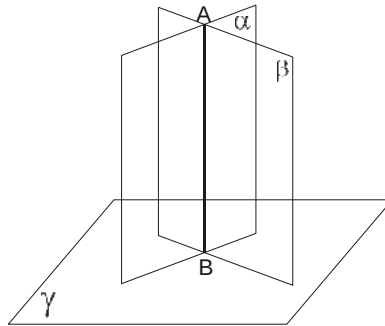


İki müstəvinin perpendikulyarlıq əlaməti

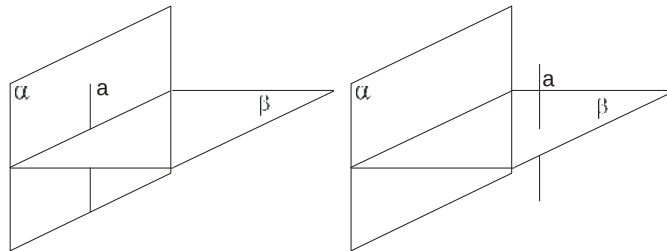
Teorem: Müstəviyə perpendikulyar olan düz xətdən keçən müstəvi, həmin müstəviyə də perpendikulyardır. $a \perp \beta, a \subset \alpha \Rightarrow \alpha \perp \beta$



Teorem: Bir müstəviyə perpendikulyar iki müstəvinin kəsişmə xətti həmin müstəviyə perpendikulyardır. $a \perp \gamma, \beta \perp \gamma, \alpha \cap \beta = AB \Rightarrow AB \perp \gamma$

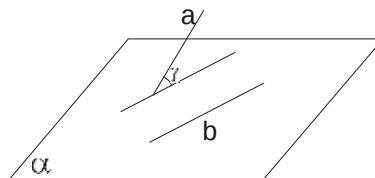


Teorem: İki perpendikulyar müstəvidən birinə perpendikulyar olan düz xətt ya o biri müstəvi üzərindədir ya da ona paraleldir. $\alpha \perp \beta, a \perp \beta \Rightarrow a \subset \alpha \vee a \parallel \alpha$



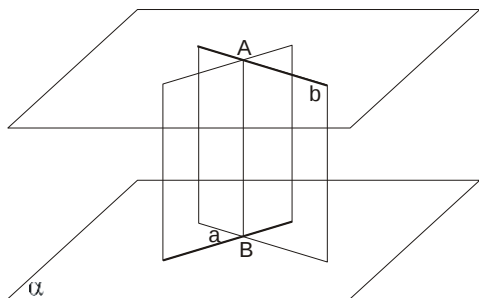
Çarpaz düz xətlər arasındakı bucaq və məsafə

Tərif: Çarpaz düz xətlər arasındakı bucaq bu xətlərə paralel olmaqla kəsişən iki düz xəttin əmələ gətirdiyi eyniadlı bucağa deyilir.



Tərif: Çarpaz düz xətlərdən hər birinə perpendikulyar olan parçanın uzunluğuna çarpaz düz xətlər arasındakı məsafə deyilir.

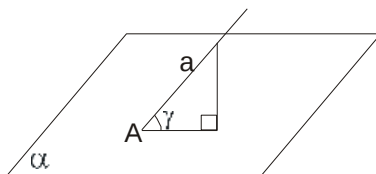
İki çarpaz düz xəttin bir və yalnız bir ortaq perpendikulyarı var və həmin perpendikulyar bu düz xətlərdən keçən paralel müstəvilərin ortaq perpendikulyarıdır.



Düz xətlə müstəvi arasındakı bucaq

Tərif: Düz xətlə onun müstəvi üzərindəki proyeksiyası arasındakı bucağa düz xətlə müstəvi arasındakı bucaq deyilir.

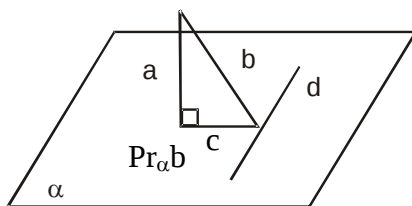
Şəkildə a düz xətti α müstəvisini A nöqtəsində kəsir. Bu düz xətlə onun həmin müstəvi üzərindəki proyeksiyası arasındakı γ bucağına a düz xətti ilə α müstəvisi arasındakı bucaq deyilir və $\gamma = (a \wedge \alpha)$ kimi göstərilir.



Üz perpendikulyar haqqında teorem

Teorem: Müstəvi üzərində mailin oturacağından keçirilmiş düz xətt, mailin proyeksiyasına perpendikulyardır, onda o mailə də perpendikulyardır.

Tərs teorem: Müstəvi üzərindəki düz xətt mailə perpendikulyardır, onda o mailin proyeksiyasına da perpendikulyardır



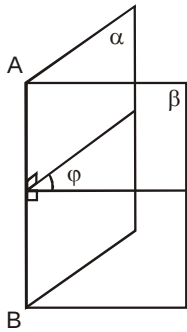
Başqa sözlə,

$$\begin{cases} a \perp \alpha, b \cap \alpha, b \not\subset \alpha \\ c = \text{Pr}_\alpha b, d \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow c \perp d \Leftrightarrow b \perp d$$

Çoxüzlülər, onların səthi və həcmi

İkiüzlü bucaqlar

Tərif: Bir düz xətdən çıxan iki yarımmüstəvinin əmələ gətirdiyi fiqura ikiüzlü bucaqlar deyilir.



$$\angle(\alpha, \beta) = \varphi$$

$$0 < \varphi < 180^\circ$$

Yarımmüstəvilərə ikiüzlü bucağın üzləri, onların ortaq düz xəttinə ikiüzlü bucağın tili deyilir.

İkiüzlü bucağın tilinə perpendikulyar olan müstəvi onun üzlərini iki yarım düz xətt üzrə kəsir. Bu yarım düz xətlərin əmələ gətirdiyi bucağa ikiüzlü bucağın xətti bucağı deyilir.

İkiüzlü bucağın xassələri

Teorem: Bərabər ikiüzlü bucaqların xətti bucaqları bərabərdir.

Tərs teorem: Xətti bucaqları bərabər olan ikiüzlü bucaqlar bərabərdir.

Teorem: İkiüzlü bucaqların böyüyünün xətti bucağı böyükdür.

Tərs teorem: İkiüzlü bucaqlardan xətti bucağı böyük olan ikiüzlü bucaq böyükdür. İkiüzlü bucaqlar öz xətti bucaqları ilə ölçülür. Xətti bucağına uyğun olaraq iti, düz, kor və açıq ikiüzlü bucaqlar olur.

Nəticə:

1. Düz ikiüzlü bucaqlar bərabərdir.
2. Kəsişən müstəvilərin əmələ gətirdiyi eyniadlı (qarşılıqlı) ikiüzlü bucaqlar bərabərdir.
3. Üzləri paralel olan eyniadlı bucaqlar bərabərdir, əks adların cəmi 180° – dir.

NÜMUNƏLƏR:

1. Düzbucaqlı $\triangle ABC$ -nin katetləri 15 sm və 20 sm-dir. C düzbucaq təpəsindən bu üçbucaq müstəvisinə $CD = 35$ sm perpendikulyarı çəkilmişdir. D nöqtəsindən AB hipotenuzuna qədər olan məsafəni tapın.

A) 30 B) 33 C) 35 D) 37 E) 40

Həlli:

$\triangle ABC$ -də $CM \perp AB$ çəkək.

$\triangle ABC$ -də Pifaqor teoreminə əsasən

$$AB = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25 \text{ sm.}$$

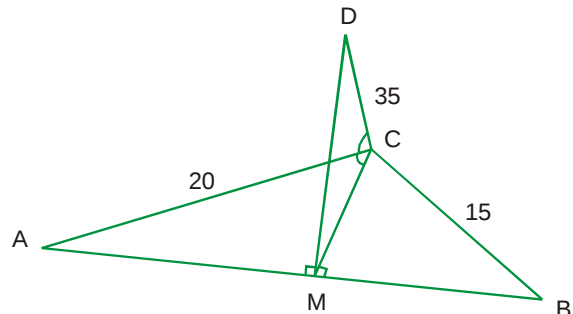
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15 = 25 \cdot CM$$

$$CM = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12 \text{ sm}$$

Üç perpendikulyar haqqında teoremə əsasən $DM \perp AB$ $\triangle DCM$ -dən Pifaqor teoreminə əsasən

$$DM = \sqrt{CM^2 + CD^2} = \sqrt{12^2 + 35^2} = 37 \text{ sm}$$

$$DM = 37 \text{ sm} \quad \textbf{Cavab : D}$$



2. AB düz xətt parçası C nöqtəsində α müstəvisini kəsir və $AC : CB = 4:1$. A nöqtəsindən α müstəvisinə qədər məsafə 2 sm olarsa, B nöqtəsindən bu müstəviyə qədər olan məsafəni tapın.

A) 0,5 B) 1 C) 1,5 D) 2 E) 2,5

Həlli:

A və B nöqtələrindən α müstəvisinə AF və BE perpendikulyarlarını çəkək.

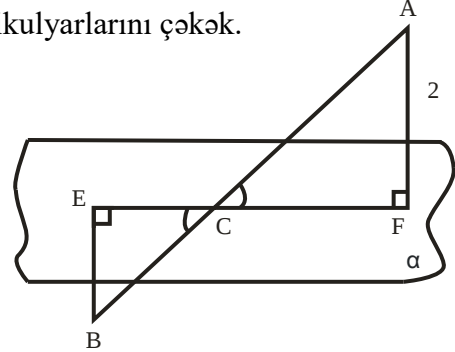
Tutaq ki, $AC = 4x$, $CB = x$

$\triangle BEC \sim \triangle ACF$ olduğundan,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AF}{BE} \text{ . Buradan}$$

$$BE = \frac{CB \cdot AF}{AC} = \frac{x \cdot 2}{4x} = 0,5$$

$$BE = 0,5 \text{ sm.}$$



Cavab: A

3. Müstəvi xaricində götürülmüş nöqtədən bu müstəviyə AB perpendikulyarı və AC, AD mailləri çəkilmişdir. $\angle ACB = \angle ADB = 60^\circ$, $\angle CAD = 90^\circ$. $\triangle ACD$ -nin xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusunun AB parçasının uzunluğuna olan nisbətini tapın.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

Həlli:

AC və AD mailləri α müstəvisi ilə eyni bucaq əmələ gətirdiklərinə görə bərabərdir.

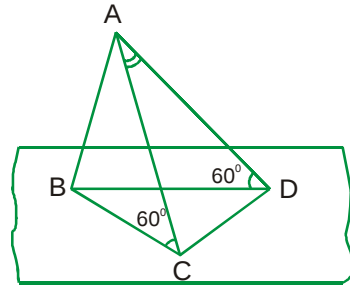
Tutaq ki, $AC = CD = x$. Onda $CD = 2R = x \sqrt{2}$

və ya $R = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ olar.

$$\text{Digər tərəfdən } \triangle ABC\text{-dən } AB = AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Buradan

$$R:AB = \frac{x\sqrt{2}}{2} : \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{x\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



Cavab: C

4. Oturacağı 6 sm, yan tərəfi 5 sm olan bərabəryanlı üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrə mərkəzindən üçbucaq müstəvisinə uzunluğu 1 sm olan perpendikulyar qaldırılmışdır. Bu perpendikulyarın ucundan üçbucağın oturacağına qədər olan məsafəni tapın.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{11}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

Həlli:

Tutaq ki, $\triangle ABC$ -də $AB=BC=5$ sm, $AB=6$ sm. $DO=1$ sm, $AE=EB$, $DO \perp \alpha$. DE parçasının uzunluğunu tapaq.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CE \cdot AB = p \cdot r, CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

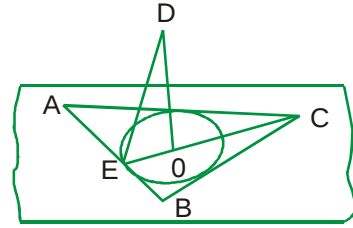
$$p = \frac{5+5+6}{2} = 8$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 8 \text{ r.}$$

$$\text{Buradan } r = \frac{2 \cdot 6}{8} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ sm}$$

$\triangle DEO$ -dan Pifaqor teoreminə görə, α

$$DE = \sqrt{DO^2 + OE^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2} \text{ sm.}$$



Cavab: E

5. CA və DB parçaları 120° -li CABD ikiüzlü bucağının tilinə perpendikulyardırlar. AB=3sm, CA=1 sm, BD = 2 sm olduğunu bilərək CD-nin uzunluğunu tapın.

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Həlli:

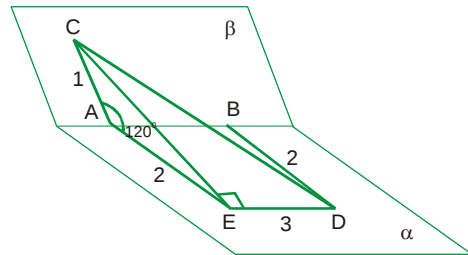
D nöqtəsindən $DB \perp AB$, A nöqtəsindən $AE \perp AB$ çəkək. Onda $AE \perp DE$ olar. CE və CD parçalarını çəkək. Üç perpendikulyar haqqındakı teoremə əsasən $CE \perp ED$ və $\triangle CED$ – düzbucaqlı üçbucaqdır. AEDB düzbucaqlıdır. $AE=BD=2\text{sm}$, $AB=ED=3\text{sm}$. $\triangle CAE$ -də kosinuslar teoreminə əsasən,

$$\begin{aligned} CE^2 &= AC^2 + AE^2 - 2 AC \cdot AE \cos 120^\circ = \\ &= 1+4-2 \cdot 1 \cdot 2 \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + 4 + 2 = 7 \text{ sm} \end{aligned}$$

$\triangle CED$ -də Pifaqor teoreminə əsasən

$$CD^2 = CE^2 + ED^2 = 7 + 9 = 16 \text{ sm}^2.$$

$$\text{Burdan } CD = \sqrt{16} = 4 \text{ sm alarıq.}$$

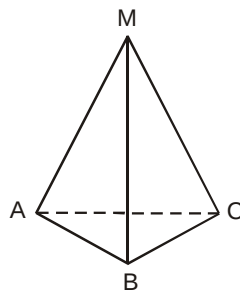


Cavab: B

Üçüzlü bucaqlar

Tərif: Ortaq təpəsi və cüt-cüt ortaq tərəfləri olan üç müstəvi bucaqdan ibarət fiqura üçüzlü bucaq deyilir.

Müstəvi bucaqların ortaq təpəsinə üçüzlü bucağın təpəsi, müstəvi bucaqlara, onun üzləri, onların ortaq tərəflərinə üçüzlü bucağın tilləri deyilir. Şəkildə M təpə bucağı, MA, MB, MC tillər, $\angle AMB$, $\angle BMC$, $\angle CMA$ – müstəvi bucaqlardır.



Üçüzlü bucağın xassələri

1. Üçüzlü bucaqda hər bir müstəvi bucaq o biri iki müstəvi bucağın cəmindən kiçik, fərqiindən böyükdür. Başqa sözlə $\angle AMB = \gamma, \angle AMC = \beta, \angle BMC = \alpha$ olarsa,

$$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$$

$$|\alpha - \gamma| < \beta < \alpha + \gamma$$

$$|\alpha - \beta| < \gamma < \alpha + \beta$$

2. Üçüzlü bucaq üçün sinuslar teoremi: Üçüzlü bucağın MA, MB və MC tillərinə aid ikiüzlü bucaqları uyğun olaraq α', β', γ' olarsa $\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} = \frac{\sin \beta'}{\sin \beta} = \frac{\sin \gamma'}{\sin \gamma}$ ifadəsi doğrudur.

3. Üçüzlü bucaq üçün kosinuslar teoremi

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha'$$

$$\cos \beta = \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos \beta'$$

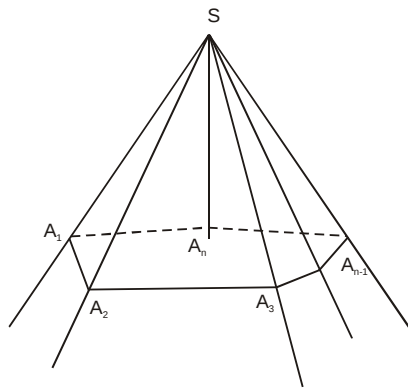
$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma'$$

Çoxüzlü bucaqlar və onların xassələri

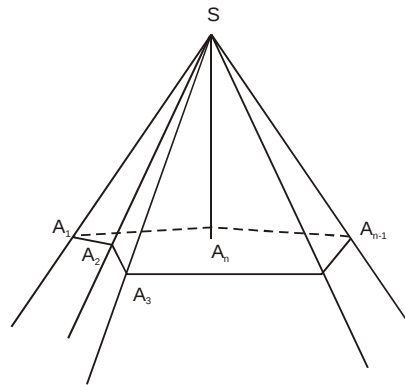
Tərif: Müstəvi üzərində $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ çoxbucaqlısını və onun xaricində S nöqtəsini götürüb $SA_1, SA_2, SA_3, \dots, SA_n$ şüalarını çəkkək. Nəticədə ortaq təpəli $A_1SA_2, A_2SA_3, \dots, A_nSA_1$ müstəvi bucaqlarını alırıq.

Belə müstəvi bucaqlarının əmələ gətirdiyi fiqura çoxüzlü bucaq deyilir.

$A_1SA_2, A_2SA_3, \dots, A_nSA_1$ müstəvi bucaqları çoxüzlü bucağın üzləri, ortaq S təpəsinə onun təpə nöqtəsi deyilir. Hər tilin özü eyni zamanda bir ikiüzlü bucağın tilidir. Ona görə də çoxüzlü bucağın neçə tili varsa, o qədər də ikiüzlü bucağı və müstəvi bucağı vardır. Çoxüzlü bucaqda ən azı üç üz olur. Çoxüzlü bucaq ya təpəsində qoyulmuş bir hərflə (S), və ya bir neçə hərflə ($SA_1A_2 \dots A_n$) işarə olunur ki, bunlardan birincisi təpə nöqtəsini, digərləri isə düzülüşünə görə tilləri göstərir



a)



b)

Çoxüzlü bucağın hər üzünü qeyri-məhdud uzatdıqda həmin bucaq bu üzün hər tərəfində qalarsa, ona qabarıq çoxüzlü (şəkil a) əks halda qabarıq olmayan (çökük) çoxüzlü deyilir (şəkil b).

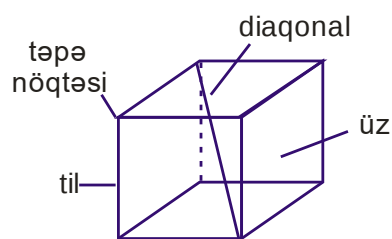
Çoxüzlü bucağın xassələri

1. Qabarıq çoxüzlü bucağın hər bir müstəvi bucağı onun qalan müstəvi bucaqlarının cəmindən kiçikdir.
2. Qabarıq çoxüzlü bucağın müstəvi bucaqlarının cəmi 360° -dən kiçikdir, yəni $\angle A_1SA_2 + \angle A_2SA_3 + \dots + \angle A_{n-1}SA_n + \angle A_nSA_1 < 360^\circ$

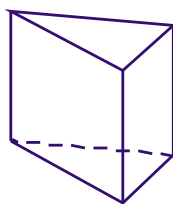
Çoxüzlülər

Tərif: Səthi sonlu sayda müstəvi çoxbucaqlıların ortaq tərəflərinə çoxüzlünün tilləri, çoxüzlünü hüdudlandıran çoxbucaqlılara onun üzləri deyilir.

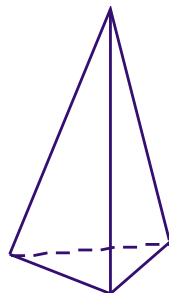
Çoxüzlünün bir nöqtəsində birləşən üzləri çoxüzlü bucaq əmələ gətirir. Belə çoxüzlü bucaqların təpələrinə çoxüzlünün təpələri deyilir. Çoxüzlü onun üzləri ilə üst-üstə düşən müstəvilərin hər birindən bir tərəfdə yerləşərsə, ona qabarıq, əks halda qabarıq olmayan çoxüzlü deyilir. Çoxüzlülərə misal olaraq kubu, prizmanı, piramidanı və s. misal gətirmək olar.



Kub



Prizma



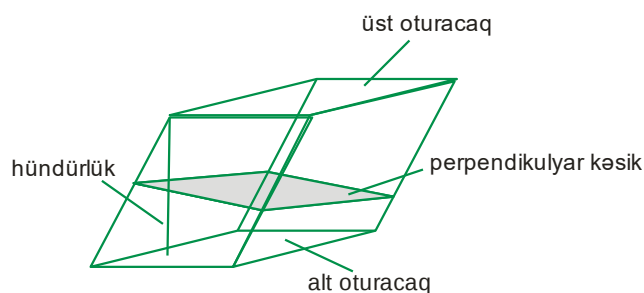
Piramida

Prizma

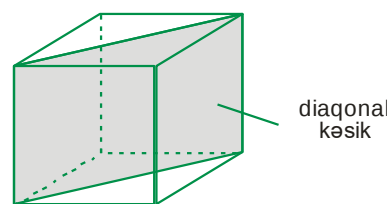
Tərif: Üzlərindən ikisi uyğun tərəfləri paralel və bərabər olan müstəvi çoxbucaqlı, qalan üzləri paraleloqram olan çoxüzlüyə prizma deyilir.

Çoxbucaqlılara prizmanın oturacaqları, çoxbucaqlının təpə nöqtələrinə prizmanın təpə nöqtələri, uyğun təpə nöqtələrini birləşdirən parçalara prizmanın yan tilləri, paraleloqramlara isə prizmanın yan üzləri deyilir.

Prizmanın bir üzü üzərində olmayan iki təpə nöqtəsini birləşdirən düz xətt parçasına prizmanın diaqonalı, oturacaqlar arasındakı məsafəyə onun hündürlüyü deyilir (şəkil a).



a)



düz prizma

b)

Prizmanın oturacağı n bucaqlıdırsa, ona n bucaqlı prizma deyilir. Prizmanın bir üzü üzərində olmayan, iki yan tilindən keçən müstəviyə diaqonal müstəvisi, bu müstəvi ilə kəsiyinə diaqonal kəsiyi deyilir (şəkil b).

Prizmanın yan tilinə perpendikulyar keçirilmiş müstəvi ilə kəsişməsindən alınan çoxbucaqlıya perpendikulyar kəsik deyilir (şəkil a). Prizmanın yan tilləri oturacağa perpendikulyar olduqda ona düz prizma (şəkil b), əks halda mail prizma deyilir (şəkil a).

Paralelepiped

Tərif: Oturacaqları paraleloqram olan prizmaya paralelepiped deyilir.

Paralelepipedin yan tili oturacağına perpendikulyar olduqda ona düz, əks halda mail paralelepiped deyilir.

Düz paralelepipedin oturacağı düzbucaqlı olduqda ona düzbucaqlı paralelepiped, kvadrat olduqda düzgün paralelepiped deyilir.

Düzbucaqlı paralelepipedin bir tərəfdən çıxan üç tilinin uzunluğuna onun ölçüləri deyilir.

Tərif: Ölçüləri bərabər olan düzbucaqlı paralelepipedə kub deyilir.

Paralelepipedin üzlərinin altısı da paraleloqramdır. Düz paralelepipedin dörd yan üzü düzbucaqlı, iki oturacağı isə paraleloqramdır.

Düzbucaqlı paralelepipedin üzlərinin altısı da düzbucaqlıdır.

Düzgün paralelepipedin yan üzləri düzbucaqlı, oturacaqları isə kvadratdır.

Paralelepipedin üzlərinin və diaqonallarının xassələri

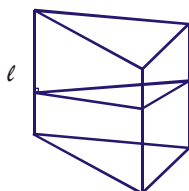
1. Paralelepipedin qarşı üzləri cüt-cüt bərabər və paraleldir.
2. Paralelepipedin bütün diaqonalları bir nöqtədə kəsişir və bu nöqtə ilə yarıya bölünür.
3. Paralelepipedin diaqonallarının orta nöqtələri onun simmetriya mərkəzidir.
4. Düzbucaqlı paralelepipedin bütün diaqonallarının uzunluğu bərabərdir.
5. Düzbucaqlı paralelepipedin diaqonalinın kvadratı, onun üç ölçüsünün kvadratı cəminə bərabərdir. Başqa sözlə, düzbucaqlı paralelepipedin ölçüləri a, b, c diaqonalı d olarsa, onda: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ olur.

Prizmanın yan və tam səthi

Tərif: Prizmanın yan üzlərinin sahələri cəminə onun yan səthi, yan səthinin sahəsi ilə oturacaqlarının sahələri cəminə isə onun tam səthinin sahəsi deyilir. Yan səth S_{yan} , tam səth isə S_{tam} – la işarə olunur. Onda

$$S_{tam} = S_{yan} + 2S_{ot}$$

Teorem: Mail prizmanın yan səthi onun perpendikulyar kəsiyinin perimetri (P_{pk}) ilətilinin uzunluğu (l) hasilinə bərabərdir:



$$S_{yan} = P_{pk} \cdot l$$

Düz prizmanın yan səthinin sahəsi

$$S_{yan} = P_{ot} \cdot H$$

Burada P_{ot} - oturacağın perimetri, H - prizmanın hündürlüyüdür.

Düzbucaqlı paralelepipedin yan səthinin sahəsi

Burada a, b -düzbucaqlı paralelepipedin oturacağının tərəfləri, c -isə yan tilidir.

Düzbucaqlı paralelepipedin tam səthinin sahəsi

$$S_{tam} = 2(ab + ac + bc)$$

Burada a, b, c -düzbucaqlı paralelepipedin ölçüləridir.

Kubun yan və tam səthi

$$S_{yan} = 4a^2, S_{tam} = 6a^2,$$

Düzbucaqlı paralelepiped, düz və mail prizmanın həcmi

Teorem:Düzbucaqlı paralelepipedin həcmi onun üç ölçüsünün hasilinə bərabərdir.

$$V = abc$$

Qeyd: həcm düsturunda hasilı oturacağın sahəsi, c isə hündürlük olduğundan onu belə də ifadə etmək olar :

Düzbucaqlı paralelepipedin həcmi (V) onun oturacağının sahəsi (S_{ot}) ilə hündürlüyü (H) hasilinə bərabərdir:

$$V = S_{ot} \cdot H$$

Teorem: Maili prizmanın həcmi (V) oturacağının sahəsi (S_{ot}) ilə hündürlüyü (H) hasilinə bərabərdir.

$$V = S_{ot} \cdot H$$

Teorem: Maili prizmanın həcmi (V) onun perpendikulyar kəsiyinin sahəsi (S_{pkt}) ilə yantilinin uzunluğu (l) hasilinə bərabərdir:

$$V = S_{pk} \cdot l$$

Nəticə: Düz prizmanın həcmi (V) onun oturacağının sahəsi (S_{ot}) ilə yan tilinin uzunluğu (l) hasilinə bərabərdir :

$$V = S_{ot} \cdot l$$

NÜMUNƏLƏR:

1. Düz paralelepipedin diaqonalları 9 sm və $\sqrt{33}$ sm, oturacağının perimetri 18 sm, yan tili isə 4 sm-dir. Paralelepipedin tam səthinin sahəsini tapın.

A) 64 B) 74 C) 84 D) 94 E) 104

Həlli:

Tutaq ki, $BD_1 = \sqrt{33}$ sm,

$AC_1 = 9$ sm, $AA_1 = 4$ sm,

AB = a, BC = b-dir. Onda,
düzbucaqlı $\triangle DD_1B$ və $\triangle ACC_1$ -dan,
Pifaqor teoreminə görə:

$$BD = \sqrt{33-16} = \sqrt{17} \text{ sm};$$

$$AC = \sqrt{81-16} = \sqrt{65} \text{ sm}$$

Digər tərəfdən məsələnin şərtinə əsasən

$$2(a+b) = 18, a+b=9$$

ABCD paraleloqramının tərəflərinin kvadratları cəmi onun diaqonallarının kvadratları cəminə bərabər olduğundan:

$$2a^2 + 2(9-a)^2 = 17+65 \Rightarrow a^2 - 9a + 20 = 0 \Rightarrow a = 5 \text{ sm}, b = 4 \text{ sm}.$$

$\triangle ABD$ -dan kosinuslar teoreminə əsasən:

$$17 = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4}{5}$$

Paralelepipedin oturacağının sahəsi:

$$S_{ot} = ab \sin \alpha = 5 \cdot 4 \cdot \frac{4}{5} = 16 \text{ sm}^2$$

Yan səthinin sahəsi:

$$S_{yan} = P_{ot} \cdot h = 18 \cdot 4 = 72 \text{ sm}^2$$

Tam səthinin sahəsi:

$$S_{tam} = 2S_{ot} + S_{yan} = 2 \cdot 16 + 72 = 104 \text{ sm}^2$$

Cavab: E

2. Düzbucaqlı paralelepipedin diaqonallarının uzunluğu ℓ olub üzlərdən biri ilə 30° -li, digəri ilə 45° -li bucaq əmələ gətirir. Paralelepipedin həcmi tapın.

A) $\frac{\sqrt{2}\ell^3}{3}$

B) $\frac{\sqrt{2}\ell^3}{5}$

C) $\frac{\sqrt{2}\ell^3}{7}$

D) $\frac{\sqrt{2}\ell^3}{8}$

E) $\frac{\sqrt{2}\ell^3}{9}$

Həlli:

Tutaq ki, $\angle BA_1C = 30^\circ$

$\angle CA_1C_1 = 45^\circ$

$A_1C = \ell$ və $BC = a$,

$AB = b$. $C_1C = c$

$\triangle A_1BC$ -də

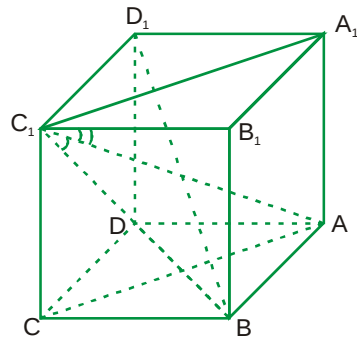
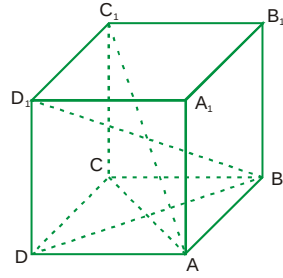
$\angle A_1BC = 90^\circ$ olduğundan, $a = \ell \sin 30^\circ = \frac{\ell}{2}$

$\angle A_1CC_1$ -də $\angle A_1C_1C = 90^\circ$ olduğundan,

$c = \ell \sin 45^\circ = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$ Onda $\triangle AA_1B$ -dan Pifaqor teoreminə əsasən

$$b = \sqrt{A_1B^2 - c^2} = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4} - \frac{2\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{\ell^2}{4}} = \frac{\ell}{2}$$

Paralelepipedin həcmi:



$$V = abc = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\ell\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\ell^3}{8}$$

Cavab: D

3 Düz paralelepipedin oturacağı, tərəfləri 1 sm və 4 sm iti bucağı 60° olan paraleloqramdır. Paralelepipedin böyük diaqonalı 5 sm-dir. Onun həcmi tapın.

- A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$ D) $5\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

Həlli:

Tutaq ki, $AB=1\text{sm}$, $BC=4\text{sm}$, $\angle BAD = 60^\circ$, onda $\angle ADC=120^\circ$. AC tərəfini kosinuslar teoreminə görə tapmaq olar:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos 120^\circ = 1 + 16 + 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 21$$

$AC_1=5\text{sm}$ olduğundan, Pifaqor teoreminə əsasən:

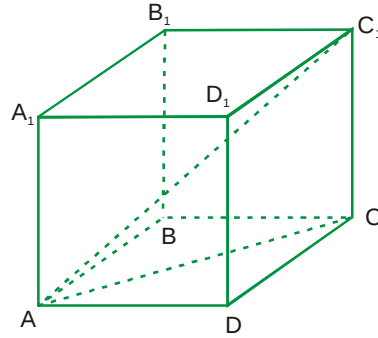
$$CC_1^2 = AC_1^2 - AC^2 = 25 - 21 = 4$$

Onda $CC_1=2\text{sm}$.

Paralelepipedin həcmi $V = S_{\text{ot}} \cdot CC_1$;

$$S_{\text{ot}} = AB \cdot AD \sin 60^\circ = 1 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ sm}^2$$

$$\text{Onda } V = 2\sqrt{3} \cdot 2 = 4\sqrt{3} \text{ sm}^3$$



Cavab: C

4. Kubun iki qonşu yan üzünün kəsişməyən diaqonalları arasındakı məsafə d -dir. Kubun həcmi tapın.

- A) $\sqrt{2}d^3$ B) $2\sqrt{2}d^3$ C) $3\sqrt{2}d^3$ D) $4\sqrt{2}d^3$ E) $5\sqrt{2}d^3$

Həlli:

Tutaq ki, aralarındakı məsafə d olan diaqonallar AD_1

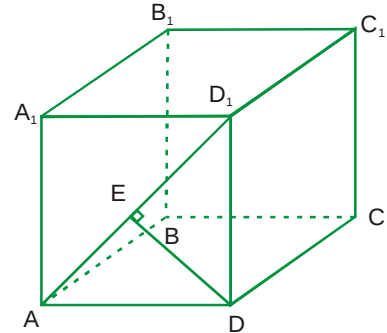
və DC_1 -dir. $DE \perp AD_1$ çəkək.

Onda $DE = d$ olar və DE üzün diaqonalının yarısıdır.

Onda $\triangle DED_1$ -dən Pifaqor teoreminə görə

$$DD_1 \frac{2}{1} = d^2 + d^2 \Rightarrow d\sqrt{2} \text{ olar. Kubun həcmi:}$$

$$V = a^3 = (d\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}d^3$$



Cavab: B

5. Kubun alt oturacağının tərəfindən keçən müstəvi alt oturacaqdan hesablanmaqla kubun həcmi 1:3 nisbətində bölür. Bu müstəvi ilə oturacaq müstəvisi arasındakı bucağın tangensini tapın.

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

Həlli:

Həlli:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ paralelepipedində BC_1 parçası BD_1 diaqonalının BB_1 $C_1 C$ üzü üzərindəki proyeksiyadır.

Onda düzbucaqlı $\triangle BC_1 D_1$ -də

$$BD_1 = \frac{C_1 D_1}{\sin 30^\circ} = 2 C_1 D_1 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ sm,}$$

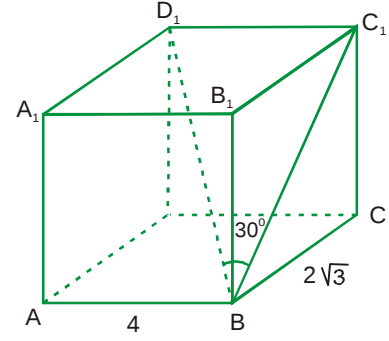
$$BD_1 = 8 \text{ sm,}$$

$$BC_1 = BD_1 \cos 30^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ sm}$$

$$BC_1 = 4\sqrt{3} \text{ sm}$$

$$\begin{aligned} \triangle BC_1 C \text{-dən } CC_1 &= \sqrt{BC_1^2 - BC^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \\ &= \sqrt{48 - 12} = \sqrt{36} = 6 \text{ sm} \end{aligned}$$

$$\text{Onda } V = S_{ABCD} \cdot CC_1 = 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6 = 48\sqrt{3} \text{ sm}^3$$

**Cavab: D**

8. $ABCA_1 B_1 C_1$ düz üçbucaqlı prizmasında $AB=BC=2\text{sm}$, $\angle ABC = 60^\circ$. Prizmanın yan tili oturacağın BD hündürlüyünə bərabədirsə, bu prizmanın həcmi tapın.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

E) 5

Həlli:

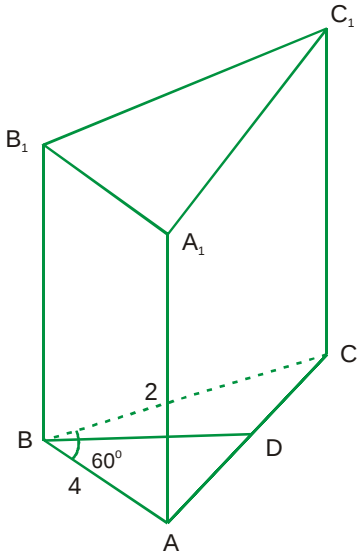
Bərabəryanlı üçbucağın hər hansı bucağı 60° olarsa, o bərabərtərəfli üçbucaqdır. Buna görə də

$$BD = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ sm}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \text{ sm}^2$$

$$\text{Onda şərtə əsasən } BB_1 = BD = \sqrt{3} \text{ sm}$$

$$\text{və } V = S_{ABC} \cdot BB_1 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3 \text{ sm}^3$$

**Cavab: C**

9. Düzgün dördbucaqlı prizmada oturacağın iki qonşu tərəflinin ortasından keçən müstəvi, üç yan tili kəsir və oturacaq müstəvisi ilə 60° -li bucaq əmələ gətirir. Oturacağın tərəfi 2 sm-dir. Alınmış kəsiyin sahəsini tapın.

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10

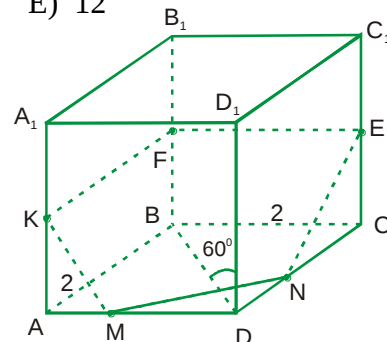
E) 12

Həlli:

$ABCN$ beşbucaqlısı $KFENM$ kəsiyinin prizmanın oturacağı üzərindəki ortoqonal proyeksiyasıdır.

$$\text{Ona görə də } S_{KFENM} = \frac{S_{ABCNM}}{\cos \alpha}$$

$$S_{ABCNM} = S_{ABCD} - S_{DMN} = AD^2 - \frac{1}{2} MD \cdot DN =$$



$$= 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} = 3,5 \text{ sm}^2$$

$$S_{KFENM} = \frac{3,5}{0,5} = 7 \text{ sm}^2$$

Cavab: A

10. Mail üçbucaq prizmanın yan tilləri arasındakı məsafə 13sm, 14 sm və 15 sm, yan səthinin sahəsi 42 sm²-dir. Prizmanın həcmi tapın.

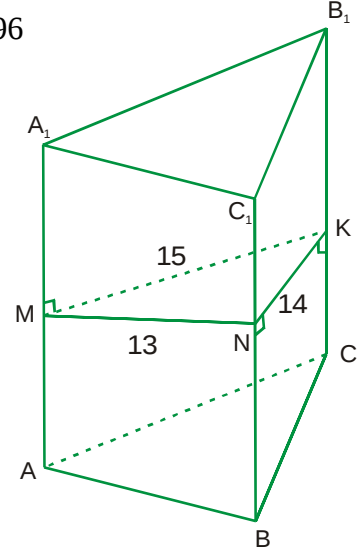
- A) 140 B) 152 C) 168 D) 172 E) 196

Həlli:

Mail prizmanın həcmi $V = S_{pk} \cdot \ell$ düsturu ilə hesablamaq olar. Burada S_{pk} – perpendikulyar kəsiyin sahəsi, ℓ - yan tilin uzunluğudur. Məsələnin şərtinə görə $a=13\text{sm}$, $b=14\text{ sm}$, $c=15\text{ sm}$ olduğundan

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21\text{sm}$$

$$S_{pk} = S_{MKN} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84 \text{ sm}^2$$



Digər tərəfdən $S_{yan} = P_{p.k} \cdot \ell$ düsturunda

$$P_{p.k.} = P = 21 \text{ sm}, S_{yan} = 42 \text{ sm}^2 \text{ olduğunu nəzərə alaraq, } S_{yan} = P_{p.k.} \cdot \ell, \ell = \frac{S_{yann}}{P_{p.k}} = \frac{42}{21} = 2 \text{ sm}$$

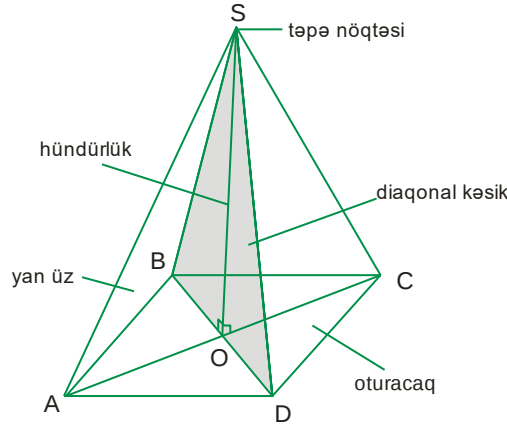
olar. Onda $V = S_{pk} \cdot \ell = 84 \cdot 2 = 168 \text{ sm}^3$

Cavab: C

Piramida

Tərif: Bir üzü hər hansı çoxbucaqlı, qalan üzləri ortaq təpəli üçbucaqlar olan çoxüzlüyə piramida deyilir.

Çoxbucaqlıya – piramidanın oturacağı, ortaq təpəli üçbucaqlara onun yan üzləri, ortaq təpəyə - piramidanın təpə nöqtəsi, yan üzlərin kəsişmə xətlərinə piramidanın yan tilləri deyilir.



döndübucaqlı piramida

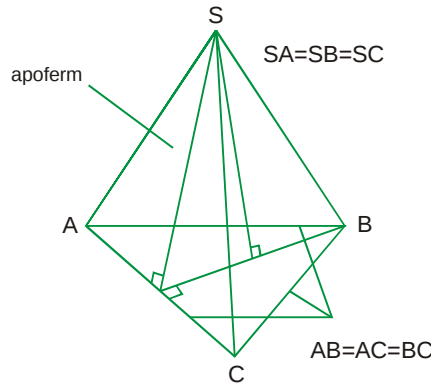
Piramidanın təpəsindən oturacağa endirilmiş perpendikulyarın oturacağa qədər olan parçasına piramidanın hündürlüyü deyilir.

Piramidanın təpədən keçən müstəvilərlə kəsikləri üçbucaqlıdır. Piramidanın təpəsindən və oturacağın diaqonalından keçən müstəviyə piramidanın diaqonal müstəvisi, alınan kəsiyə isə diaqonal deyilir.

Tərif : Piramidanın oturacağı düzgün çoxbucaqlı və hündürlüyün oturacağı çoxbucaqlının mərkəzi ilə üst-üstə düşürsə, belə piramidaya düzgün piramida deyilir.

Düzgün piramidanın təpə nöqtəsindən çəkilmiş yan üzünün hündürlüyünə piramidanın apofemi deyilir.

Düzgün piramidanın yan üzləri bir-birinə bərabər olan bərabəryanlı üçbucaqdır. Üçbucaqlı piramidaya tetraedr (dördüzlü) deyilir. Bütün üzləri bərabər olan tetraedr düzgün tetraedr adlanır.



düzgün üçbucaqlı
piramida

Oturacağı daxilinə və ya xaricinə çəkilmiş çevrə çəkilə bilən piramidanın xassələri

Aşağıda eyniölçülü təkliflərdən hər hansı biri doğru olduqda piramidanın oturacağı daxilinə çevrə çəkmək olur və piramidanın hündürlüyü bu çevrənin mərkəzindən keçir.

1. Piramidanın yan üzləri və ya apofemləri oturacaq müstəvisi ilə eyni bir bucaq (α) əmələ gətirir.
2. Piramidanın apofemləri bərabərdir.
3. Apofemlər piramidanın hündürlüyü ilə eyni bucaq əmələ gətirir.

4. $S_{ot} = S_{yan} \cos \alpha$, burada S_{ot} - piramidanın oturacağıın sahəsi S_{yan} - piramidanın yan səthinin sahəsidir.

Aşağıda eynigüclü təkliflərdən hər hansı biri doğru olduqda piramidanın oturacağı xaricinə çevrə çəkmək olur və piramidanın hündürlüyü bu çevrənin mərkəzindən keçir.

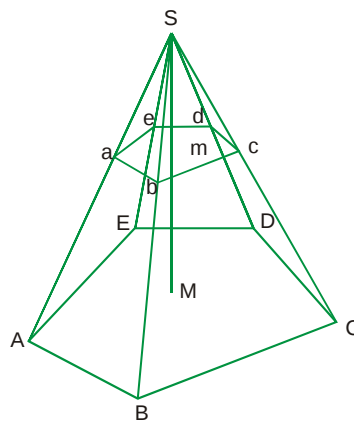
1. Piramidanın yan tilləri bərabərdir
2. Yan tillər oturacaq müstəvisi ilə eyni bucaq əmələ gətirir.
3. Yan tillər piramidanın hündürlüyü ilə eyni bucaq əmələ gətirir.

Piramidanın paralel kəsiklərinin xassələri

Teorem : Piramidanı oturacağına paralel müstəvi ilə kəsədikdə:

1. Bu müstəvi piramidanın yan tillərini və hündürlüyünü mütənasib parçalara bölür. Yəni

$$\frac{S_a}{aA} = \frac{S_b}{bB} = \frac{S_c}{cC} = \dots = \frac{S_m}{mM}$$



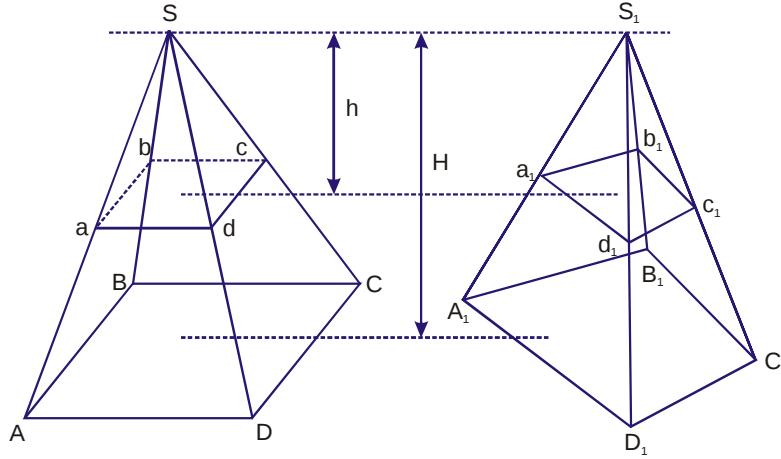
2. Kəsikdə alınan çoxbucaqlı oturacağa oxşar olur.

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \dots, \angle ABC = \angle abc, \angle BCD = \angle bcd, \dots$$

3. Kəsiyin və oturacağın sahələri nisbəti onların təpədən olan məsafələrinin kvadratlari nisbətinə bərabərdir.

$$\frac{S_{ABCDE}}{S_{abcde}} = \frac{SM^2}{Sm^2}$$

Teorem : Hündürlükləri bərabər olan iki piramida, təpədən bərabər məsafədə və oturacaqların paralel müstəvilərlə kəsilərsə, kəsiklərin sahələri oturacaqlarının sahələri ilə mütənasib olur.



Başqa sözlə, $\frac{S_{ABCDE}}{S_{abcde}} = \frac{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}}{S_{a_1b_1c_1d_1e_1}}$.

Nəticə: Hündürlükləri bərabər olan iki piramidanın oturacaqlarının sahələri bərabər olarsa, təpələrdən bərabər məsafədə olan kəsikləri sahələri də bərabər olar.

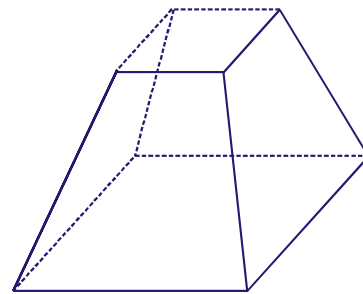
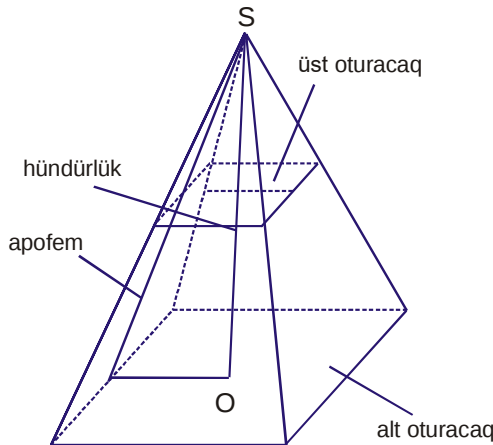
$$S_{ABCDE} = S_{A_1B_1C_1D_1E_1} \Rightarrow S_{abcde} = S_{a_1b_1c_1d_1e_1}$$

Kəsik piramida

Tərif: Piramidanın oturacağı ilə oturacaq müstəvisinə paralel olan kəsiyi arasında qalan hissəsinə kəsik piramida deyilir. Kəsik piramidanın oturacaqları oxşar çoxbucaqlılar, onun yan üzləri trapesiyadır. Kəsik piramidanın oturacaqları paraleldir. Bu oturacaqlar arasındakı məsafə kəsik piramidanın hündürlüyüdür.

Tərif: Kəsik piramida düzgün piramidanın hissəsi olarsa, ona düzgün kəsik piramida deyilir.

Düzgün kəsik piramidanın yan üzləri bərabəryanlı trapesiya olub, oturacaq müstəvilərinə bərabər bucaq altında meyl edir. Düzgün kəsik piramidanın yan üzünün hündürlüyünə onun apofemi deyilir.

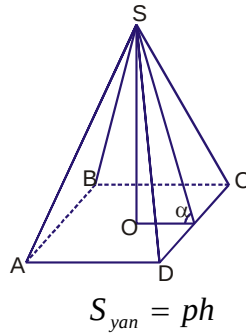


Piramidanın yan və tam səthinin sahəsi

Tərif: Piramidanın yan üzlərinin sahələri cəmi onun yan səthinin sahəsi, bütün üzlərinin sahələri cəmi isə tam səthinin sahəsi adlanır. Yan səthin sahəsi S_{yan} , tam səthin sahəsi S_{tam} kimi işrə edilir. Onda

$$S_{tam} = S_{yan} + S_{ot}$$

Teorem: Düzgün piramidanın yan səthinin sahəsi oturacağın yarımperimetri (p) ilə apofemi (h) hasilinə bərabərdir.



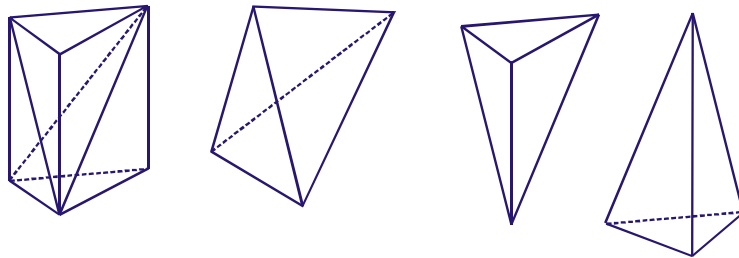
Teorem: Piramidanın yan üzləri oturacaq müstəvisi ilə eyni α bucağı əmələ gətirərsə, onda piramidanın yan və tam səthi aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$1) S_{yan} = \frac{S_{ot}}{\cos \alpha};$$

$$2) S_{tam} = \frac{S_{ot}}{\cos \alpha} + S_{ot} = \frac{2S_{ot} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$$

Qeyd: Düzgün olmayan piramidanın yan səthinin sahəsini tapmaq üçün bütün yan üzlərinin (üçbucaqlarının) sahələri cəmini tapmaq lazımdır.

Teorem: düzgün kəsik piramidanın yan səthinin sahəsi onun oturacaqlarının p_1 və p_2 yarımperimetrləri cəmi ilə h apofeminin hasilinə bərabərdir.



$$S_{yan} = (p_1 + p_2) \cdot h$$

Teorem: Oturacaqlarının sahələri S_1 və S_2 olan ($S_1 > S_2$), kəsik piramidanın bütün yan üzləri oturacaq müstəvisi ilə eyni α bucağı əmələ gətirərsə, onun yan və tam səthi aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$1) S_{yan} = \frac{S_1 - S_2}{\cos \varphi}; \quad 2) S_{tam} = \frac{S_1 - S_2}{\cos \varphi} + S_1 + S_2$$

Piramida və kəsik piramidanın həcmi

Teorem: Piramidanın həcmi, onun oturacağıın sahəsi ilə hündürlüyü hasilinin üçdə birinə bərabərdir:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ot} \cdot H$$

Burada S_{ot} -piramidanın oturacağıın sahəsi, H -piramidanın hündürlüyüdür.

Şəkildə görüldüyü kimi piramidanın həcmi, oturacağıın sahəsi və hündürlüyü piramida ilə eyni olan uyğun prizmanın həcmnin üçdə birinə bərabərdir.

Teorem:Hündürlüyü H , oturacaqlarının sahəsi S_1 və S_2 olan kəsik piramidanın həcmi

$$V = \frac{1}{3} H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

düsturu ilə hesablanır.

NÜMUNƏLƏR:

1. Düzgün üçbucaqlı piramidanın oturacağındakı üçbucağın tərəfi 2 sm olub, yan tili oturacaq müstəvisi ilə 60° -li bucaq əmələ gətirir. Piramidanın yan səthinin sahəsini tapın.

A) 4 B) $\sqrt{19}$ C) $\sqrt{29}$ D) 6 E) $\sqrt{39}$

Həlli:

Piramidanın hündürlüyünün oturacağından (O nöqtəsi) $OK \perp AB$ çəkək. Üç perpendikulyar haqqındakı teoremə əsasən $SK \perp AB$. Onda $\triangle SAK$ -dan $SK = \sqrt{SA^2 - AK^2}$,

$$AK = \frac{1}{2} AB = 1 \text{ sm. } SA\text{-nın uzunluğunu}$$

$$\triangle SAO\text{-dan tapaq. } AO = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ sm}$$

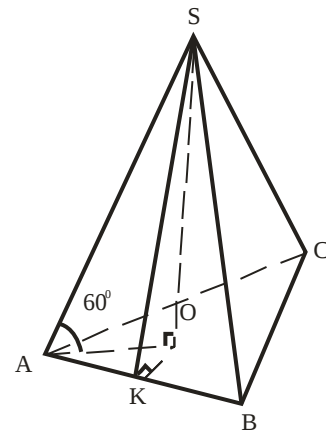
(AO parçası bərabərtərəfli üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusuna bərabərdir).

$$SA = \frac{AO}{\cos 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3} : \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Onda, } SK = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{16}{3} - 1} = \sqrt{\frac{13}{3}} \text{ sm}$$

və piramidanın yan səthinin sahəsi:

$$S_{yan} = p \cdot h = \frac{3 \cdot AB}{2} \cdot SK = 3 \cdot SK = 3\sqrt{\frac{13}{3}} = \sqrt{39} \text{ sm}^2$$



Cavab: E

2. Düzgün dördbucaqlı piramidanın yan tili ℓ olub, oturacaq müstəvisi ilə α -bucağı əmələ gətirir. Piramidanın həcmi tapın.

A) $\frac{2}{3}\ell^3 \cos \alpha \sin^2 \alpha$ B) $\frac{2}{3}\ell^3 \sin \alpha \cos \alpha$ C) $\frac{2}{3}\ell^3 \cos^2 2 \alpha \sin \alpha$
D) $\frac{2}{3}\ell^3 \cos 2\alpha \sin \alpha$ E) $\frac{2}{3}\ell^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$

Həlli:

SABSD piramidasında

$$SA = SB = SC = SD = \ell$$

$\angle SDO = \alpha$, $SO \perp (ABCD)$

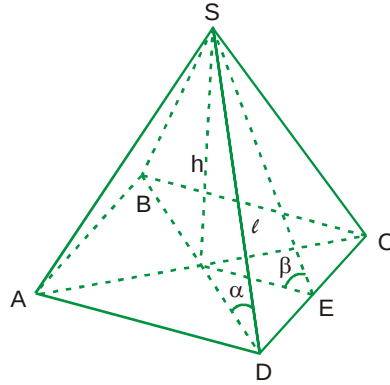
$\triangle SOD$ -dən $SO = \ell \sin \alpha$,

$$BO = OD = \ell \cos \alpha,$$

$$BD = 2 \cdot OD = 2 \ell \cos \alpha$$

Tutaq ki, $AB=BC=CD=DA=a$, onda, O

$$BD = a\sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ell \cos \alpha$$



Digər tərəfdən $S_{ABCD} = a^2 = 2 \ell^2 \cos^2 \alpha$.

Alınmış ifadələri həcm düsturunda nəzərə alsaq:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{2}{3} \ell^3 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha \text{ olar.}$$

Cavab: E

3. Düzgün dördbucaqlı piramidanın hündürlüyü h , oturacaqdakı ikiüzlü bucağı β olarsa, onun həcmi tapın.

A) $\frac{4}{3}h^3 \operatorname{ctg} \beta$ B) $\frac{4}{3}h^3 \operatorname{tg}^2 \beta$ C) $\frac{4}{3}h^3 \operatorname{ctg} 2\beta$
D) $\frac{4}{3}h^3 \operatorname{ctg}^2 \beta$ E) $\frac{4}{3}h^2 \operatorname{ctg} 2\beta$

Həlli:

SABCD düzgün dördbucaqlı piramidasında O nöqtəsi hündürlüyün oturacağı olub, diaqonalların kəsişmə nöqtəsində yerləşir. $OE \perp DC$ çəkək və E nöqtəsini $\angle$ nöqtəsilə birləşdirək. Üç perpendikulyar haqqındakı teoremə görə $SE \perp DC$ və deməli $\angle SEO = \beta$ oturacaqdakı ikiüzlü bucağın xətti bucağıdır. $\triangle SOE$ -dən $OE = h \operatorname{ctg} \beta$. Onda $AD = 2 OE = 2 h \operatorname{ctg} \beta$ və $S_{ABCD} = AD^2 = 4h^2 \operatorname{ctg}^2 \beta$. Alınmış ifadələri həcm düsturunda nəzərə alsaq:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 4h^2 \operatorname{ctg}^2 \beta \cdot h = \frac{4}{3}h^3 \operatorname{ctg}^2 \beta$$

Cavab: D

4. Piramidanın oturacaqları tərəfləri 13 sm, 14 sm və 15 sm olan üçbucaqdır. Onun yan tillərinin hər birinin $8\frac{13}{32}$ sm olduğunu bilərək piramidanın həcmi tapın.

A) $60\frac{1}{2}$ B) $60\frac{2}{3}$ C) $60\frac{3}{4}$
D) $60\frac{3}{8}$ E) $60\frac{5}{8}$

Həlli:

Tutaq ki, $SA = SB = SC = 8 \frac{13}{32} \text{ sm}$, $AB = c = 15 \text{ m}$, $BC = a = 13 \text{ sm}$, $AC = b = 14 \text{ sm}$.

Məlumdur ki, piramidanın yan tilləri bərabər olduqda, piramidanın oturacağı xaricinə çevrə çəkmək olar və piramidanın hündürlüyü bu çevrənin mərkəzindən keçir.

Çevrənin radiusunu $R = \frac{abc}{4S}$ düsturuna əsasən tapmaq olar. Heron düsturuna əsasən

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$P = \frac{a+b+c}{2} = 21 \text{ sm. Onda}$$

$$S = \sqrt{21(21-3)(21-4)(21-5)} = 84 \text{ sm}^2 \text{ və}$$

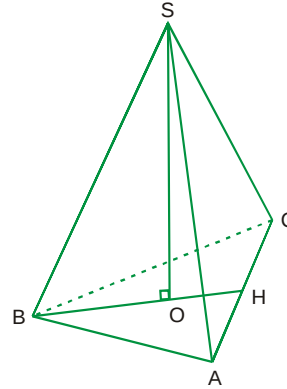
$$R = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8} \text{ sm.}$$

$$BO = R = \frac{65}{8} \text{ sm,}$$

Hündürlük:

$$SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{\left(\frac{269}{32}\right)^2 - \left(\frac{65}{8}\right)^2} = \frac{69}{32} = 2 \frac{5}{32} \text{ sm}$$

$$\text{Həcm: } V = \frac{1}{3} S_{ot} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 84 \cdot \frac{69}{32} = 60 \frac{3}{8} \text{ sm}^3$$



Cavab: D

5. Diaqonalının uzunluğu 18 sm, oturacaqlarının tərəfləri isə 14 sm və 10 sm olan düzgün dördbucaqlı kəsik piramidanın həcmi tapın.

A) 820 B) 840 C) 872 D) 880 E) 900

Həlli:

Kəsik piramidanın həcmi:

$$V = \frac{h}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}), \text{ burada}$$

$$S_1 = AB^2 = 14^2 = 196 \text{ sm}^2, S_2 = A_1 B_1^2 = 10^2 = 100 \text{ sm}^2$$

-dir. Hündürlük: $h = B_1 K = \sqrt{B_1 D^2 - KD^2}$

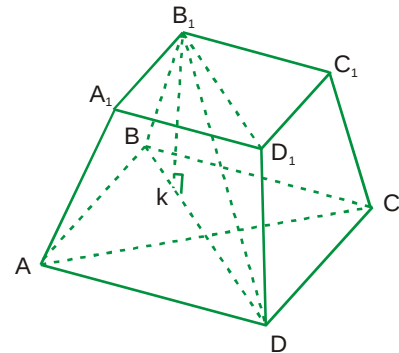
$BB_1 D_1 D$ – bərabəryanlı trapesiya olduğu üçün,

$$BK = \frac{1}{2} (BD - B_1 D_1) = \frac{1}{2} (14\sqrt{2} - 10\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \text{ sm}$$

$$\text{və } KD = BD - BK = 12\sqrt{2} \text{ sm}$$

Onda $h = \sqrt{18^2 - (12\sqrt{2})^2} = 6 \text{ sm}$. Qiymətləri həcm düsturunda nəzərə alsaq:

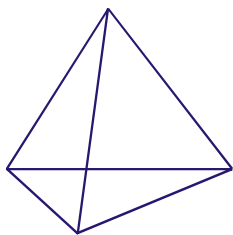
$$V = \frac{6}{3} (196 + 100 + 140) = 2 \cdot 436 = 872 \text{ sm}^3$$



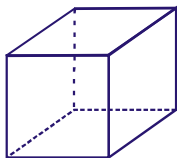
Cavab: C

Düzgün çoxüzlülər

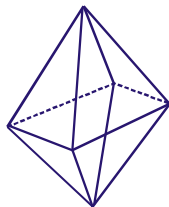
Tərif: Bütün üzləri bir-birinə bərabər olan düzgün çoxbucaqlı və bütün çoxüzlü bucaqları bərabər olan çoxüzlüyə düzgün çoxüzlü deyilir.



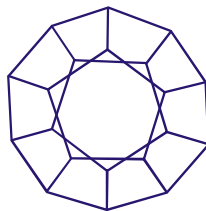
Tetraedr



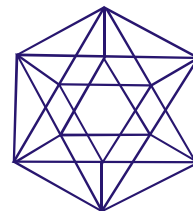
Kub



Oktaedr



Dodekaedr



İkosaedr

Düzgün çoxüzlülərin bütün müstəvi bucaqları, ikiüzlü bucaqları və tilləri bərabərdir. Beş növ qabarıq düzgün çoxüzlü vardır). Düzgün tetraedr, kub (heksaedr), oktaedr, dodekaedr.

Düzgün çoxbucaqlının növü	Üzlərin sayı və forması	Tillərin ümumi sayı	Təpə nöqtələrinin sayı	Bir nöqtələrdən çıxan tillərin sayı
Tetraedr	4-üçbucaq	6	4	3
Kub	6-kvadrat	12	8	3
Oktaedr	8-üçbucaq	12	6	4
Dodekaedr	12-beşbucaqlı	30	20	3
İkosaedr	20-üçbucaq	30	12	5

Bütün qabarıq çoxüzlülər üçün Eyler teoremi doğrudur:
 $e - k + f = 2$, burada e -təpə nöqtələrinin sayı, f -üzlərin sayı, k -tillərin sayıdır.

Fırlanma cisimləri

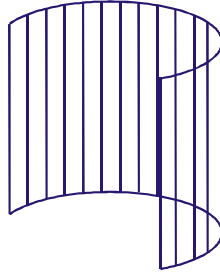
Fırlanma səthi

Tərif: Hərəkətdə cismin hər bir nöqtəsi çevrə cızarsa, belə hərəkət fırlanma adlanır. Doğurdan deyilən hər hansı bir xəttin, ox deyilən tərpənməz düz xətt ətrafında fırlanmasından əmələ gələn səthinə fırlanma səthi deyilir.

Tərif: Fırlanma səthi və oxa perpendikulyar olan iki paralel müstəvi ilə həddüdlənən cismə fırlanma cismi deyilir.

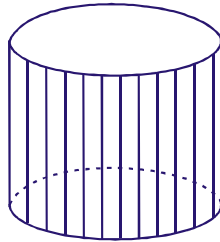
Silindr

Tərif: Silindrik səth və iki müstəvi ilə hədudlanan cismə silindr deyilir.

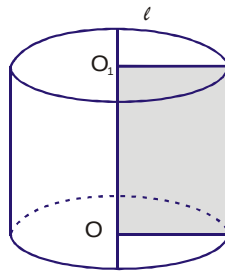


Silindr səthinin iki müstəvi arasında qalan hissəsinə silindrin yan səthi və bu səthin kəsdiyi müstəvi hissələrinə isə silindrin oturacaqları deyilir. Oturacaq müstəviləri arasındakı məsafəyə silindrin hündürlüyü deyilir. Silindrin doğuranların oturacaqlara perpendikulyar və ya maili olmasından asılı olmayaraq, silindr düz və ya maili olur.

Tərif: Düz silindrin oturacaqları dairə olduqda ona düz dairəvi silindr deyilir.

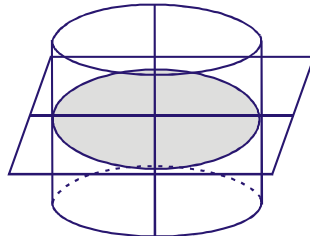


Düzbucaqlının yan tərəfləri ilə üst-üstə düşən, öz ətrafında fırlanmasından düz dairəvi silindr alınır.

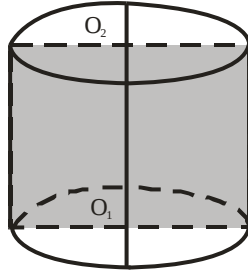


Silindrin müstəvi ilə kəsiyi

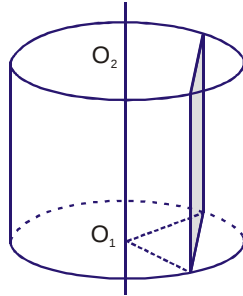
Düz dairəvi silindrin oturacaqlarına paralel müstəvi ilə kəsiyi dairədir.



Silindrin fırlanma oxundan keçən müstəvi ox kəsiyi adlanır.
Düz dairəvi silindrin ox kəsiyi düzbucaqlıdır.



Oxa kəsiyi kvadrat olan silindr bərabərtərəfli silindr adlanır. Silindrin oxa paralel olan ixtiyari müstəvi ilə kəsiyi də düzbucaqlıdır.



Silindrin yan və tam səthi

Teorem: Silindrin yan səthinin sahəsi oturacaq çevrəsinin uzunluğu ilə hündürlüyün hasilinə bərabərdir:

$$S_{yan} = 2\pi RH$$

Burada R - silindrin oturacaq çevrəsinin radiusu, H - silindrin hündürlüyüdür.

Teorem: Silindrin tam səthinin sahəsi onun yan səthi ilə oturacaqlarının sahələri cəminə bərabərdir:

$$S_{yan} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R)$$

Teorem: Silindrin həcmi oturacağın sahəsi ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir:

$$V = \pi R^2 H$$

Burada R - silindrin oturacağı, H - silindrin hündürlüyüdür.

Oxşar fiqurların həcmi

Tərif: Oxşar üçbucaqlı və ya düzbucaqlı üçbucaqların uyğun tərəfləri ətrafında fırlanmasından alınan silindr və ya konuslara oxşar silindr və ya konuslar deyilir.

Teorem: Oxşar silindr və ya konusların həcmləri nisbəti bunların radiuslarının və ya hündürlüklərinin kubları nisbətinə bərabərdir:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{R^3}{R_1^3} = \frac{H^3}{H_1^3}$$

NÜMUNƏLƏR:

1. Silindrin hündürlüyü 2 sm, ox kəsiyinin sahəsi 5sm^2 -dir. Silindrin ox kəsiyinə paralel olaraq keçirilmiş müstəvi kəsiyi bu oxdan 1 sm məsafədə olarsa, kəsin sahəsini tapın.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Hælli:

Tutaq ki, silindrin hündürlüyü – H, oturacağının radiusu R-dir. Ox kəsiyinin sahəsi $S_{ox.kəs.} = 2RH$ olduğundan,

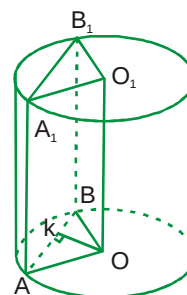
$$R = \frac{S_{ox,k}}{2H} = \frac{5}{4} = 1 \frac{1}{4} \text{ sm}, \text{ OA} = R = 1 \frac{1}{4} \text{ sm}$$

$$\triangle AOB\text{-d}\bar{a}n\ AK = \frac{1}{2} AB = \sqrt{OA^2 - OK^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{25-16}{4}} = \frac{3}{2} \text{ sm}$$

$AB=2AK=3\text{sm}$. Lakin

$$S_{\text{ox.kas}} = AB \cdot H = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3 \text{sm}^2$$



Cavab: B

2. Düz dairəvi silindrin ox kəsiyinin diaqonalı ilə doğurarı arasındakı bucaq 30° -dir. Silindrin oturacağının sahəsi $\sqrt{3} \text{ sm}^2$ olarsa, onun yan səthinin sahəsini tapın.

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Hælli:

Tutaq ki, silindrin oturacağının radiusu – r , hündürlüyü – h , $\angle A_1AB_1=30^0$ -dir.

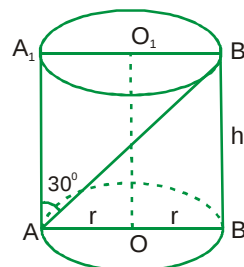
Onda şertə görə $\pi r^2 = \sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{\pi}}$ -dir.

$$\triangle AA_1B_1\text{-d}\text{en } \frac{2r}{h} = \text{tg}30^\circ$$

$$\text{Buradan } h = 2r \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$$

Alınan ifadələri $S_{\text{van}} = 2 \pi r h$ düsturunda nəzərə

$$\text{Alsaq } S_{\text{yan}} = \frac{2\pi 3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2 \cdot 3^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\pi}} = 12 \text{ sm}^2 \text{ olar.}$$



Cavab: E

3. Silindrin hündürlüyü 8 sm oturacağının radiusu 5 sm-dir. Silindr müstəvi ilə elə kəsilmişdir ki, kəsikdə kvadrat alınır. Bu kəsikdən oxə qədər olan məsafəni tapın.

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Həlli:

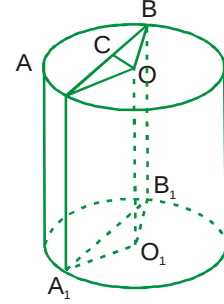
Tutaq ki, $OA = OB = R = 5$ sm, $AA_1 = AB = 8$ sm

$OC \perp AB$ olub kəsikdən oxə qədər olan məsafədir. Çevrə mərkəzindən vətərə endirilmiş perpendikulyar onu yarıya bölür və deməli

$$AC = \frac{1}{2} AB = 4 \text{ sm. Onda düzbucaqlı}$$

$\triangle AOC$ -dan Pifaqor teoreminə əsasən

$$OC = \sqrt{AO^2 - AC^2} = \sqrt{25 - 16} = 3 \text{ sm}$$



Cavab: B

4. Silindrin daxilinə şəkildə göstərildiyi kimi maili şəkildə kvadrat çəkilmişdir. Silindrin radiusu 7 sm, hündürlüyü 2 sm olarsa, kvadratin sahəsini tapın.

- A) 45 B) 53 C) 82 D) 100 E) 110

Həlli:

Tutaq ki, ABCD kvadratının tərəfi a-dır. Onda

$\triangle PMN$ -də $PM = a$, $PN = 2$ olduğundan,

Pifaqor teoreminə əsasən:

$$MN = \sqrt{a^2 - 4} \Rightarrow MO = \frac{\sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

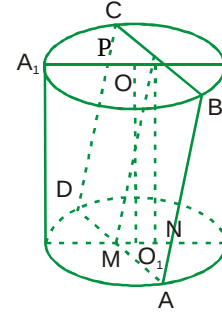
Digər tərəfdən düzbucaqlı ($AM \perp OM$) $\triangle AMO$ -dan

$$AO^2 = OM^2 + MA^2 \Rightarrow 49 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{a^2 - 4}}{2} \right)^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow \frac{2a^2 - 4}{4} = 49$$

və ya $a^2 = 100$ olar.

$$\text{Deməli } S_{ABCD} = a^2 = 100 \text{ sm}^2$$



Cavab: D

5. Silindrin doğuranından keçən və ox kəsiyi ilə $\alpha = 60^\circ$ -li bucaq əmələ gətirən müstəvi keçirilmişdir. Kəsikdə alınan düzbucaqlının uzunluğu $d = 1$ sm olan diaqonalı oturacaq müstəvisi ilə $\beta = 45^\circ$ əmələ gətirir. Silindrin yan səthinin sahəsini tapın.

- A) π B) 2π C) 3π D) 4π E) 5π

Həlli:

Silindrin yan səthinin sahəsi $S_{\text{yan}} = 2\pi RH$. Burada $H = BB_1$ hündürlüyünü $\triangle CBB_1$ -dən tapaq.

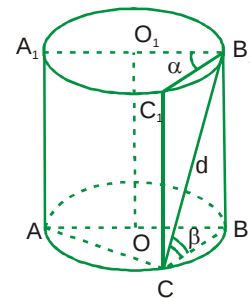
$BB_1 = B_1C \sin \beta$ və ya $H = d \sin \beta$. Oturacağın radiusunu $\triangle A_1 B_1 C_1$ -dən tapaq.

$A_1 B_1 = 2R$, $\angle A_1 C_1 B_1 = 90^\circ$ olduğunu nəzərə alsaq:

$$A_1 B_1 = \frac{B_1 C_1}{\cos \alpha} \text{ və ya } 2R = \frac{B_1 C_1}{\cos \alpha} \Rightarrow R = \frac{B_1 C_1}{2 \cos \alpha}$$

$\triangle B_1 C_1 C$ -dən $B_1 C_1 = d \cos \beta$. Bu qiyməti radius üçün alınmış ifadədə nəzərə alsaq,

$$R = \frac{d \cos \beta}{2 \cos \alpha} \text{ olar.}$$



Onda silindrin yan səthinin sahəsi:

$$S_{\text{yan}} = 2 \pi r h = 2 \pi \cdot \frac{d \cos \beta}{2 \cos \alpha} \cdot d \sin \beta = \frac{\pi d^2 \sin 2\beta}{2 \cos \alpha}$$

Sonuncu ifadədə verilənləri nəzərə alsaq:

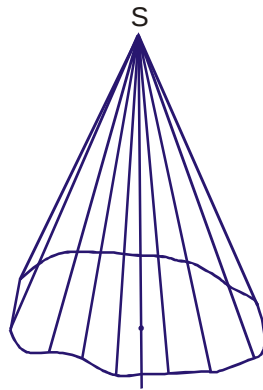
$$S_{\text{yan}} = \frac{\pi \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ}{2 \cos 60^\circ} = \frac{\pi}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \pi$$

Cavab: A

Konus. Kəsik konus

Tərif: Doğuranı düz xətt olub fırlanma oxunu kəsən fırlanma səthinə konik səth deyilir.

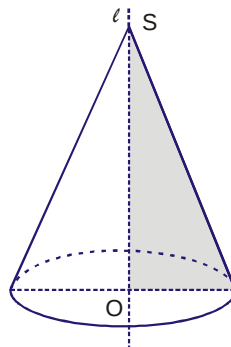
Doğuranla fırlanma oxunun kəsişmə nöqtəsi konik səthin təpəsi adlanır.



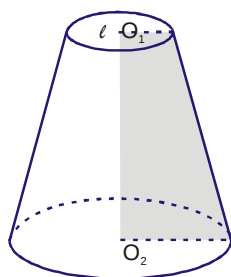
Təpədən bir tərəfdə olan konik səthlə, onu kəsən müstəvinin hüdudlandığı fiqura konus deyilir.

Konik səthin təpədən müstəviyə qədər olan hissəsinə konusun yan səthi və bu səthin kəsdiyi müstəvi hissəsinə konusun oturacağı deyilir. Təpədən oturacaq müstəvisinə endirilmiş perpendikulyara konusun hündürlüyü deyilir.

Düz dairəvi konusu, düzbucaqlı üçbucağın öz katetlərindən biri ətrafında fırlanmasından almaq olar.

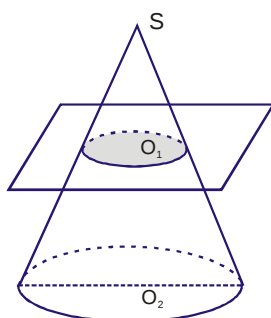


Tərif: Konusun oturacağı ilə ona paralel keçirilmiş kəsən müstəvi arasında qalan hissəsinə kəsik konus deyilir. Paralel müstəvilər üzərində olan dairələrə kəsik konusun oturacaqları deyilir. Kəsik konusu düzbucaqlı trapesiyanın kiçik yan tərəfləri ilə üst-üstə düşən öz ətrafında fırlanmasından almaq olar.

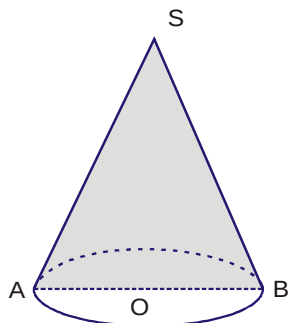


Konusun müstəvi ilə kəsiyi

Düz dairəvi konusun oturacağına paralel müstəvi ilə kəsiyi dairədir. Konusun fırlanma oxundan keçən müstəvi ilə kəsiyi konusun ox kəsiyi adlanır.

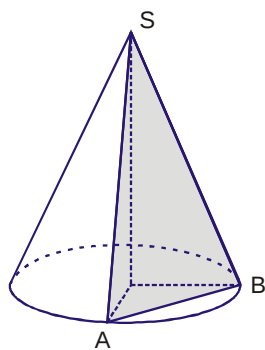


Düz dairəvi konusun ox kəsiyi bərabəryanlı üçbucaqdır.

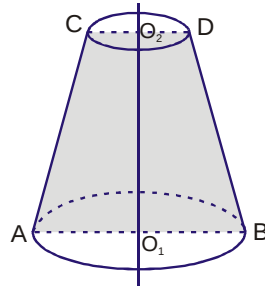


Ox kəsiyi bərabərtərəfli üçbucaq olan konusa bərabərtərəfli konus deyilir .

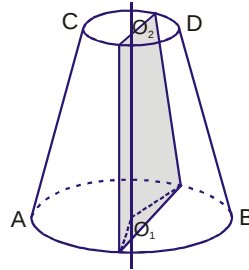
Konusun təpə nöqtəsindən keçərək oturacaq müstəvisini hər hansı vətər üzrə kəsən bütün müstəvi kəsikləri də bərabəryanlı üçbucaqlardır.



Kəsik konusun ox kəsiyi bərabəryanlı trapesiyadır.



Kəsik konusun oturacaq müstəvilərini paralel vətərlər üzrə kəsən bütün müstəvi kəsikləri də bərabəryanlı trapesiyadır.



Konusun yan və tam səthi

Teorem. Konusun yan səthi oturacaq çevrəsinin uzunluğu ilə doğuranı hasilinin yarısına bərabərdir:

$$S_{yan} = \pi RL$$

burada R – konusun oturacaq çevrəsinin radiusu, L -konusun doğuranıdır.

Teorem: Konusun tam səthinin sahəsi onun yan səthi ilə oturacağının sahəsi cəminə bərabərdir :

$$S_{tam} = \pi RL + \pi R^2 = \pi R(R + L)$$

Kəsik konus yan və tam səthi

Teorem:oturacaqlarının radiusları R və r , doğuranı L - olan kəsik konusun yan və tam səthinin sahəsi aşağıdakı düsturlarla hesablanır:

$$S_{yan} = \pi L(R + r)$$

$$S_{yan} = \pi L(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$$

Konusun və kəsik konusunun həcmi

Teorem: Konusun həcmi oturacağının sahəsi ilə hündürlüyü hasilinin üçdə birinə bərabərdir:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

burada R -konusun oturacaq çevrəsinin radiusu, H – konusun hündürlüyüdür.

Teorem:Oturacaqların radiusları R və r , hündürlüyü H kəsik konusun həcmi

$$V = \frac{1}{3} \pi H(R^2 + Rr + r^2)$$

düsturu ilə hesablanır.

NÜMUNƏLƏR:

1. Düz dairəvi konusun oturacağıının sahəsi 5 sm^2 -dir. Konusun ox kəsiyinin sahəsini tapın ($\pi = 3$ qəbul etməli)

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Həlli:

Tutaq ki, konusun hündürlüyü - h , doğuranı - ℓ , oturacağıının radiusu r -dir, oturacağıın sahəsi $S_{ot} = \pi r^2$ olduğundan, $\pi r^2 = 4 \Rightarrow r^2 = \frac{4}{\pi} \Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \text{ sm}$

Konusun yan səthinin sahəsi $S_{k.y.} = \pi r \ell$ olduğuna görə,

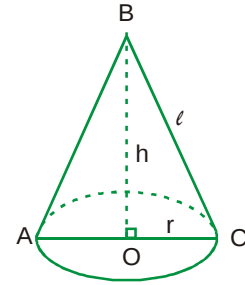
$$\pi r \ell = 5 \Rightarrow \ell = \frac{5}{\pi r} = \frac{5}{2\sqrt{\pi}} \text{ sm}$$

Konusun ox kəsiyinin sahəsi $S_{ox.kəs.} = rh$ -dir.

$\triangle BOC$ – dən

$$h = \sqrt{\ell^2 - r^2} = \sqrt{\frac{25}{4\pi} - \frac{4}{\pi}} = \sqrt{\frac{25-16}{4\pi}} = \sqrt{\frac{9}{4\pi}} = \frac{3}{2\sqrt{\pi}}$$

$$\text{Onda: } S_{ox.kəs.} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3}{2\sqrt{\pi}} = \frac{3}{\pi} = 1 \text{ sm}^2$$



Cavab: A

2. Düz dairəvi konusun təpə nöqtəsindən və 120° -li qövsü gərən vətərdən keçirilmiş müstəvi kəsiyi

oturacaq müstəvisi ilə 45° -li bucaq əmələ gətirir. Konusun oturacağıının radiusu 2 sm olarsa, kəsiyin sahəsini tapın.

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{7}$

Həlli:

Tutaq ki, $OB = r = 2 \text{ sm}$; $\angle BOD = 120^\circ$; ABD – müstəvi kəsiyi, AO – hündürlükdür.

AC ($OC \perp BD$) parçasına çəkkək. Üç perpendikulyar haqqında teoremə əsasən

$AC \perp BD$. $\triangle BOD$ -dən sinuslar teoreminə əsasən

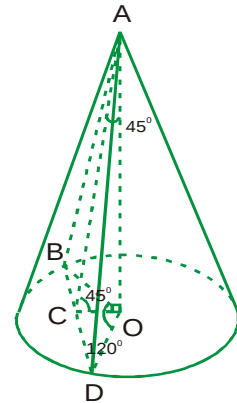
$$\frac{BD}{\sin 120^\circ} = \frac{2}{\sin 30^\circ} \Rightarrow BD = \frac{2 \sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3} \text{ sm.}$$

$$\triangle ODC\text{-dən } OC = OD \sin 30^\circ = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ sm}$$

Şərtə əsasən $\angle ACD = 45^\circ$ olduğundan,

$$\triangle ACO\text{-dan } AC = \frac{OC}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \text{ sm. Onda,}$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{6} \text{ sm}^2$$



Cavab: D

3. Düz dairəvi konusun hündürlüyü oturacağa paralel olan iki müstəvi ilə üç bərabər hissəyə ayrılmışdır. Bunlardan aşağıda qalan hissənin ortadakı hissənin həcminə olan nisbətini tapın.

- A) $\frac{8}{7}$ B) $\frac{11}{7}$ C) $\frac{15}{7}$ D) $\frac{17}{7}$ E) $\frac{19}{7}$

Həlli:

Paralel kəsiklərin xassəsinə əsasən konusu oturacağına paralel müstəvi ilə kəsikdə bu müstəvi doğuranları və hündürlüyü mütənasib parçalara bölür. Müstəvilərin təpədən başlayaraq ayırdığı konusların həcmələri nisbətini isə onların hündürlüklərinin kubları nisbətində bərabərdir. Tutaq ki, SB konusunun həcmi V , A_1ABB_1 kəsik konusunun həcmi V_1 , $A_2A_1B_1B_2$ kəsik konusunun həcmi V_2 , $SO=h$, $SO_1=h_1$, $SO_2=h_2$ -dir. Onda paralel kəsiklərin xassəsinə əsasən:

$$\frac{V+V_1}{V} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^3 = 2^3 = 8$$

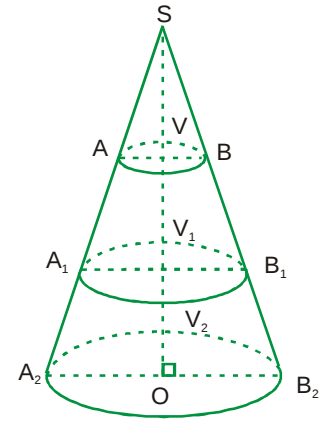
$$\text{Onda } 1 + \frac{V_1}{V} = 8 \Rightarrow \frac{V_1}{V} = 7 \Rightarrow V_1 = 7V$$

və $V_1 + V_2 = 8V$ olar.

$$\text{Digər tərəfdən: } \frac{V_2 + V_1 + V}{V_1 + V} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 =$$

$$\frac{27}{8} \Rightarrow \frac{V_2 + 8V}{8V} = \frac{27}{8} \Rightarrow V_2 = 19V$$

$$\text{Onda } \frac{V_2}{V_1} = \frac{19V}{7V} = \frac{19}{7}$$



Cavab: E

4. Kəsik konusun doğuranı 4 sm olub oturacaq müstəvisi ilə 60° -li bucaq əmələ gətirir. O. kəsiyinin sahəsi $12\sqrt{3} \text{ sm}^2$ olarsa, kəsik konusun tam səthinin sahəsini tapın.

- A) 40π B) 42π C) 44π D) 46π E) 48π

Həlli:

Tutaq ki, $OA=R$, $O_1B=r$. $BM \perp AD$ çəkək.

$$\text{Onda } \triangle ABM\text{-dan } AM = AB \sin 30^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ sm,}$$

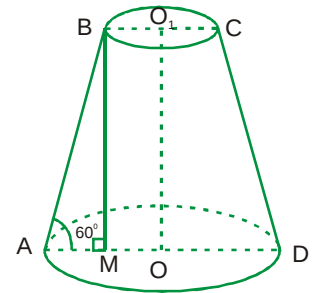
$$BM = AB \cos 30^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ sm. Digər tərəfdən}$$

$$AO=R=AM+MO = 2+r, S_{ABCD} = \frac{2R+2r}{2} \cdot BM$$

və ya $S_{ABCD} = (R+r) \cdot BM$. Son ifadədə məlum qiymətləri nəzərə alsaq,

$$12\sqrt{3} = (2+r+r) \cdot 2\sqrt{3} \text{ və ya } r = 2 \text{ sm alırıq.}$$

$$\text{Onda } S_{\text{tam}} = \pi \ell (R+r) + \pi R^2 + \pi r^2 = \pi \cdot 4(4+2) + \pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 2^2 = 44\pi \text{ sm}^2$$



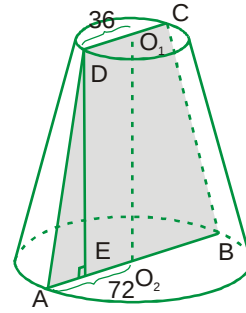
Cavab: C

5. Kəsik konusun hündürlüyü 48 sm, oturacaqların radiusları 36sm və 72 sm-dir. Doğuranın uzunluğunu tapın.

- A) 50 B) 60 C) 70 D) 80 E) 90

Həlli:

ABCD bərabəryanlı trapesiyasında $DE \perp AB$ çəkək, onda düzbucaqlı $\triangle ADE$ -də Pifaqor teoreminə görə $AD^2 = DE^2 + AE^2$. Bu ifadədə $DE = OO_1 = 48$ sm, $AE = O_2E = 72 - 36 = 36$ sm olduğunu nəzərə alsaq, $AD^2 = 48^2 + 36^2 = 12^2(4^2 + 3^2) = 12^2 \cdot 5^2 = 60^2$ sm, $AD = 60$ sm olar.



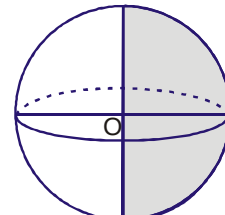
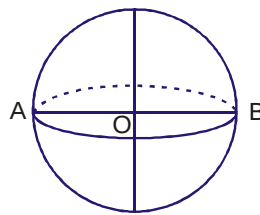
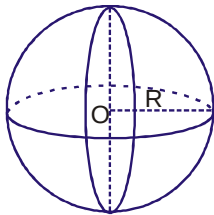
Cavab: B

Sfera və kürə

Tərif: Fəzada hər hansı bir nöqtədən məsafələri müəyyən bir müsbət ədəddən böyük olmayan bütün nöqtələr çoxluğuna kürə deyilir. Həmin nöqtə kürə mərkəzi, kürənin sərhəd nöqtələri, kürə səthi və sfera adlanır. Sferanın hər hansı nöqtəsi ilə onun mərkəzini birləşdirən düz xətt parçasına sferanın radiusu deyilir və R ilə işarə edilir.

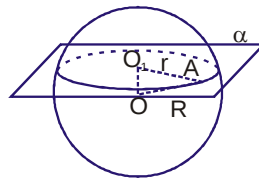
Sferanın ixtiyari iki nöqtəsini birləşdirən parçaya vətər, mərkəzdən keçən vətərə isə diametr deyilir. Kürənin hər bir diametri iki radiusa bərabərdir.

Yarımdairənin diametr ilə üst-üstə düşən ox ətrafında fırlanmasından kürə, yarımçevrənin fırlanmasından isə sfera alınır.



Sferanın və kürənin müstəvi ilə kəsiyi

Kürənin müstəvi ilə hər hansı kəsiyi dairedir. Kürənin mərkəzindən onu kəsən müstəviyə endirilmiş perpendikulyarın O_1 oturacağı ilə dairenin mərkəzidir. Dairənin radiusu $O_1A = r$, kürənin radiusu $OA = R$ olarsa, Pifaqor teoreminə görə $r = \sqrt{R^2 - OO_1^2}$ alınır.



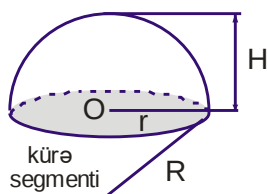
Bu münasibətdən aşağıdakı nəticələr alınır:

- Nəticə 1. $O_1O_2 = 0$ olduqda, yəni kəsən müstəvi kürə mərkəzindən keçdikdə ən böyük kəsik alınır ($r = R$).
- $O_1O_2 = R$ olduqda kəsikdə alınan çevrə nöqtəyə çevrilir ($r = 0$).
- Kürənin mərkəzindən eyni uzaqlıqda olan dairelər bərabərdir.

4. Kürənin mərkəzindən müxtəlif uzaqlıqda olan iki dairədən, mərkəzə yaxın olanın radiusu böyükdür.

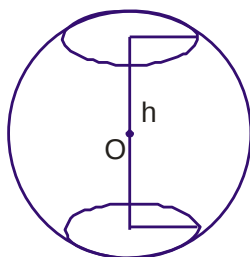
Kürənin hissələri

Tərif: Kürənin hər hansı müstəvi ilə kəsilərək ayrılan hissəsinə seqment deyilir. Kəsildikdə alınan dairəyə seqmentin oturacağı, kəsən müstəviyə perpendikulyar olan radiusun seqmentin içərisində qalan hissəsinə seqmentin hündürlüyü deyilir.

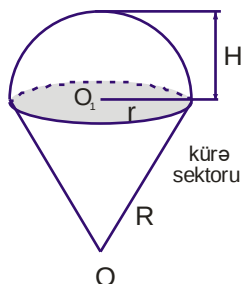


Tərif: Kürənin, onu kəsən iki paralel müstəvi arasında qalan hissəsinə kürə qatı (zolağı) deyilir.

Kəsikdə alınan dairələrə kürə qatının oturacaqları, onlar arasındakı məsafəyə isə hündürlüyü deyilir.



Tərif: Təpə nöqtəsi kürənin mərkəzində yerləşən konusun kürədən ayırdığı hissəyə kürə sektoru deyilir.



Kürə sektoru oturacaqları üst-üstə düşən konus və kürə seqmentindən ibarətdir.

Kürə hissələrinin sahələri

Teorem: Radiusu R olan sferanın səthinin sahəsi böyük dairə sahəsinin dörd mislinə bərabərdir..

$$S = 4\pi R^2$$

Teorem: Sferik sektorun sahəsi

$$S = \pi R(2H + r)$$

düsturu ilə hesablanır. Burada R – sferanın radiusu, r -seqmentin oturacağıнын radiusu, H - seqmentin hündürlüyüdür.

Teorem. Sferik seqmentin yan və tam səthinin sahəsi aşağıdakı kimi hesablanır:

$$S_{yan} = 2\pi RH$$

$$S_{tam} = \pi(2RH + r^2)$$

Teorem:Kürə qatının yan və tam səthinin sahəsi aşağıdakı kimi hesablanır:

$$S_{yan} = 2\pi RH$$

$$S_{tam} = 2\pi RH + \pi(r_1^2 + r_2^2)$$

Burada h -kürə qatının hündürlüyü, r_1 və r_2 - kürə qatının oturacaqlarının radiusudur.

Kürə, kürə seqmenti, kürə sektorunun həcmi

Teorem: radiusu R olan kürənin həcmi

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{düsturu ilə hesablanır.}$$

Teorem: hündürlüyü H , radiusu R olan kürə sektorunun həcmi

$$V_{seqm} = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right) \quad \text{düsturu ilə hesablanır.}$$

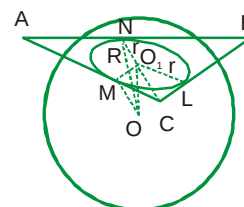
Teorem: Hündürlüyü H , radiusu R olan kürə sektorunun həcmi

$$V_{sekt} = \frac{2}{3}\pi R^2 H \quad \text{düsturu ilə hesablanır.}$$

NÜMUNƏLƏR:

1. Tərəflərinin uzunluğu 5sm, 5sm, 6sm olan üçbucaq tərəfləri ilə radiusu 2,5 sm olan kürəyə toxunur. Kürə mərkəzi ilə üçbucaq müstəvisi arasındakı məsafəni tapın.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



Həlli:

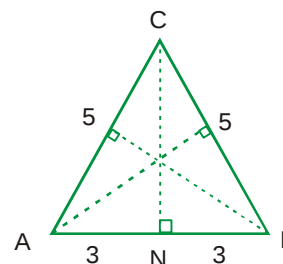
Kürənin tərəfləri bu kürəyə toxunan üçbucaq müstəvisi ilə kəsiyi, bu üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrədir. Bu çevrənin radiusunu $r = \frac{S}{R}$ düsturuna əsasən tapmaq olar:

$$P = \frac{5 + 5 + 6}{2} = 8 \text{ sm}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CN. \quad \triangle BCN\text{-dən}$$

$$CN = \sqrt{BC^2 - BN^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \text{ sm}$$

$$\text{Onda } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12 \text{ sm}^2 \quad \text{və}$$



$$r = \frac{S_{\triangle ABC}}{P} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ sm}$$

$$\triangle NO_1O\text{-dan } OO_1 = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{2,5^2 - 1,5^2} = \sqrt{6,25 - 2,25} = \sqrt{4} = 2 \text{ sm}$$

Cavab: B

2. Kürə seqmentinin hündürlüyü $\sqrt{2}$ sm, ox kəsiyindəki qövsə uyğun mərkəzi bucaq 120° -dir. Seqmentin sferik hissəsini tapın.

- A) 4π B) 5π C) 6π D) 7π E) 8π

Həlli:

Kürə seqmentinin ox kəsiyini nəzərdən keçirək. Tutaq ki, AB seqmentin oturacağıın diametri, O kürənin mərkəzidir.

$OE \perp AB$, R – kürə radiusudur.

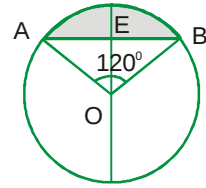
$$\text{Onda } \triangle BOE\text{-dan } \frac{OE}{OB} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow OE = \frac{1}{2} R.$$

Digər tərəfdən

$$OE = R - H = R - \sqrt{2} \text{ olduğundan,}$$

$$R - \sqrt{2} = \frac{1}{2} R \Rightarrow R = 2\sqrt{2} \text{ sm. Onda}$$

$$S = 2\pi R \cdot H = 2\pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8\pi \text{ sm}^2$$



Cavab: E

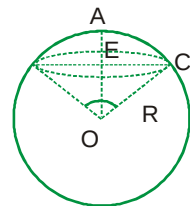
3. Kürənin həcmi $V=2$ -dir. Ox kəsiyindəki mərkəzi bucağı α olan sektorun həcmi tapın.

- A) $\sin^2 \frac{\alpha}{4}$ B) $2\sin^2 \frac{\alpha}{4}$ C) $3\sin^2 \frac{\alpha}{4}$
D) $4\sin^2 \frac{\alpha}{4}$ E) $5\sin^2 \frac{\alpha}{4}$

Həlli:

Sektorun həcmi $V_S = \frac{2}{3} \pi R^2 h$. Kürənin həcmi

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{-dür. Buradan } R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}$$



$\triangle OBC$ -da $\angle OBC = 90^\circ$ və $BO = R \cos \frac{\alpha}{2}$ Onda,

seqmentin hündürlüyü $h = AO = R - R \cos \frac{\alpha}{2} = R \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) = 2 R \sin^2 \frac{\alpha}{4}$ olar. Bu ifadələri

sektorun həcmi düsturunda nəzərə alsaq:

$$V_S = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{4} = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{3}{2\pi} \sin^2 \frac{\alpha}{4} = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{4} \text{ **Cavab: B**}$$

4. Sferik sektorun, sferik və konik səthlərinin sahələri bir-birinə bərabədirsə, sektorun həcmi küre həcminə olan nisbətini tapın.

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{3}{8}$

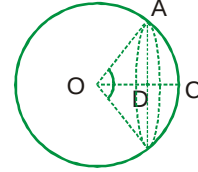
Həlli:

Tutaq ki, OACB sferik sektor, OA = R, AD=r, CD= h-dır. Onda məsələnin şərtinə görə:
 $2 \pi R h = \pi r R \Rightarrow r = 2 h$. $\triangle AOD$ -da OD = R – h, $\angle ADO = 90^\circ$ olduğundan, Pifaqor teoreminə əsasən:

$$R^2 = (2h)^2 + (R-h)^2 \Rightarrow h = \frac{2}{5} R$$

$$\text{Sektorun həcmi: } V_{\text{sek}} = \frac{2}{3} \pi h R^2 = \frac{4}{15} \pi R^3$$

$$\text{Kürənin həcmi: } V_{\text{küre}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ olduğundan, } \frac{V_{\text{sek}}}{V_{\text{küre}}} = \frac{1}{5} B$$



Cavab:
B

5. Kürənin həcmi 3 sm^3 -dir. Səthinin sahəsi bu kürənin səthinin sahəsindən 16 dəfə böyük olan digər kürənin həcmi tapın.

- A) 192 B) 180 C) 144 D) 128 E) 64

Həlli:

Bütün kürələr bir-birinə oxşardır. Oxşar fiqurlar üçün:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 = K^3$$

$$\text{Şərtə əsasən } \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{16} \text{ olduğundan,}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{16} \right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{4} \right)^3 = \frac{1}{64} . \text{ Buradan}$$

$$V_2 = 64 \cdot V_1 = 64 \cdot 3 = 192 \text{ sm}^3$$

Cavab: A

Çoxüzlülərlə fırlanma fiqurlarının müxtəlif kombinasiyaları

Tərif: Oturacaqları silindrin oturacaq çevrələri daxilinə çəkilmiş bərabər çoxbucaqlılar olan düz prizmaya silindr daxilinə çəkilmiş prizma deyilir.

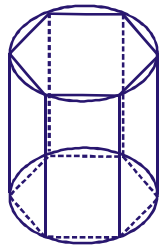
Daxilə çəkilmiş prizmanın hündürlüyü silindrin hündürlüyünə bərabərdir (şəkil a).

Teorem: Əgər düzbucaqlı düz prizma silindrin daxilinə çəkilibsə, onda qarşı yan tərəflərdəki ikiüzlü bucaqların cəmi 180° -yə bərabərdir (şəkil b).

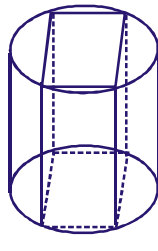
Tərif: Oturacaqları düz prizma oturacaqlarının daxilinə çəkilən çevrələr olan silindrə prizma daxilinə çəkilmiş silindr deyilir. (şəkil c).

Tərifdən göründüyü kimi yalnız oturacağın daxilinə çevrə çəkmək mümkün olan düz prizmanın daxilinə silindr çəkmək olar.

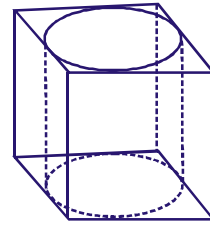
Teorem: Düzbucaqlı düz prizmanın daxilinə silindr çəkilə bilərsə, onda prizmanın qarşı yan üzlərinin sahələri cəmi bərabərdir (şəkil c).



a)

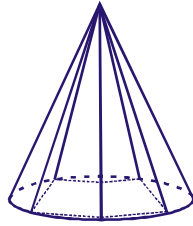


b)



c)

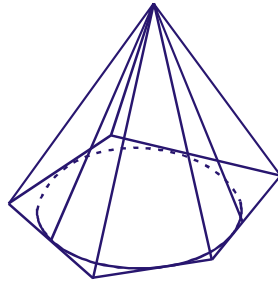
Tərif: Oturacağı – konusun oturacaq çevrəsi daxilinə çəkilmiş çoxbucaqlı, təpə nöqtəsi isə onun təpə nöqtəsi ilə üst-üstə düşən piramidaya konus daxilinə çəkilmiş piramida deyilir.



Konus daxilinə çəkilən piramidanın bütün yan tilləri bərabərdir.

Tərif: Oturacağı – konusun oturacaq çevrəsi xaricinə çəkilmiş çoxbucaqlı, təpə nöqtəsi isə konusun təpə nöqtəsi ilə eyni olan piramidaya konus xaricinə çəkilmiş piramida deyilir.

Teorem: Piramidanın daxilinə konus çəkilə bilməsi üçün onun oturacağı daxilinə çevrə çəkilə bilməsi və piramidanın hündürlüyünün bu çevrənin mərkəzindən keçməsi zəruri və kafidir.



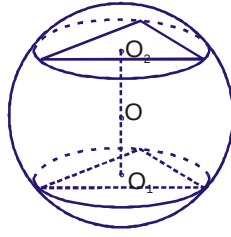
Tərif. Prizmanın bütün təpə nöqtələri sferanın üzərində olarsa, sferaya prizma xaricinə çəkilmiş sfera, prizmaya isə sfera daxilinə çəkilmiş prizma deyilir.

Teorem: Prizmanın xaricinə sfera çəkilə bilməsi üçün iki şərtin ödənilməsi zəruri və kafi şərtidir.

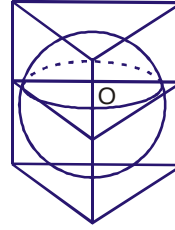
1. Prizma düz olmalıdır.
2. Onun oturacaqları xaricinə çevrə çəkilməsi mümkün olmalıdır.

Prizma xaricinə çəkilmiş sferanın mərkəzi oturacaqların xaricinə çəkilmiş çevrələrin mərkəzlərini birləşdirən parçanın orta nöqtəsidir (şəkil a).

Tərif: Prizmanın bütün üzləri sferaya toxunarsa, sferaya prizma daxilinə çəkilmiş sfera, prizmaya isə sfera xaricinə çəkilmiş prizma deyilir (şəkil b).



a)



b)

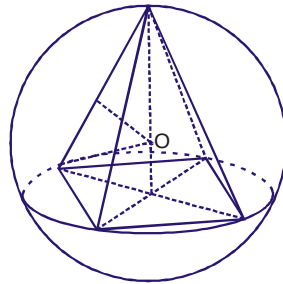
Teorem: Prizmanın daxilinə sfera çəkilə bilməsi üçün iki şərtin ödənilməsi zəruri və kafidir.

1. Prizmanın oturacaqları daxilinə çevrə çəkilməsi mümkün olmalıdır.
2. Prizmanın hündürlüyü bu çevrənin diametrinə bərabər olmalıdır.

Tərif: Bütün təpələri sfera üzərində olan piramidaya kürə daxilinə çəkilmiş piramida, sferaya isə piramida xaricinə çəkilmiş sfera deyilir.

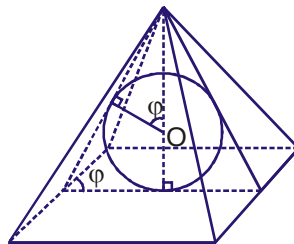
Teorem: Piramidanın xaricinə sfera çəkilə bilməsi üçün zəruri və kafi şərt onun oturacağının xaricinə çevrə çəkilə bilməsidir.

İxtiyari düzgün piramidanın xaricinə sfera çəkmək olar. Sferanın mərkəzi, oturacağın xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzindən çevrə müstəvisinə çəkilmiş perpendikulyar düz xətlə yan tilin ortasından bu tilə çəkilmiş perpendikulyar müstəvinin kəsişmə nöqtəsində yerləşir.



Tərif: Piramidanın bütün üzələrinə toxunan kürəyə piramida daxilinə çəkilmiş kürə deyilir.

İxtiyari düzgün piramidanın daxilinə kürə çəkmək olar. Kürənin mərkəzi piramidanın oturacağındakı ikiüzlü bucaqların bisektorlarının kəsişmə nöqtəsidir. Kürənin yan üzlərlə toxunma nöqtələri piramidanın apofemləri üzərindədir.



Düzgün piramida daxilinə çəkilmiş kürə üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$R = \frac{aH}{2h + a}$$

$$\frac{a}{2R} = \frac{h}{H - R} = \frac{H}{R \cdot \operatorname{tg} \varphi}$$

burada h -piramidanın apofemi, H -piramidanın hündürlüyü, a -oturacağıın tərəfi, R -kürənin radiusu, φ -yan üzlə oturacaq arasındakı bucaqdır.

Qeyd: Çoxüzlünün daxilinə kürə çəkmək mümkündürsə, belə çoxüzlünün həcmi onun tam səthinin sahəsi ilə aşağıdakı kimi ifadə olunur

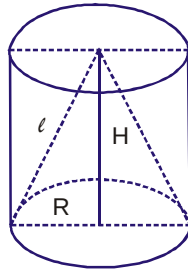
$$V = \frac{1}{3} R \cdot S_{tam}$$

burada V -çoxüzlünün həcmi, S_{tam} -çoxüzlünün tam səthinin sahəsi, R - çoxüzlünün daxilinə çəkilmiş kürənin radiusudur.

Bir-birinin daxilinə çəkilmiş fırlanma fiqurlarının müxtəlif kombinasiyaları

Silindr daxilinə çəkilmiş konus

Tərif: oturacağı – silindrin bir oturacağı ilə üst-üstə düşən, təpəsi silindrin digər oturacağının mərkəzi üzərində olan konusa silindr daxilinə çəkilmiş konus deyilir.



İxtiyari silindrin daxilinə konus çəkmək olar. Belə konusun oturacağı silindrin bir oturacağı üzərində olub təpə nöqtəsi silindrin digər oturacağının mərkəz nöqtəsi ilə üst-üstə düşməlidir.

Düz dairəvi silindr daxilinə çəkilmiş konus üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur.

$$H_{sl} = H_{kon} = H; R_{sl} = R_{kon} = R$$

$$l = \sqrt{R_{sl}^2 + H_{sl}^2}, V_{sl} = 3V_{kon}$$

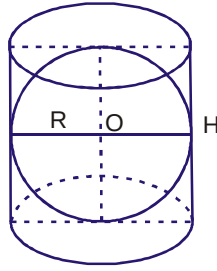
$$S_{y.sl} = 2\pi R_{sl} H_{sl}$$

$$S_{y.kon} = \pi R_{kon} l$$

burada $S_{y.sl}$ - silindrin yan səthinin sahəsi, $S_{y.kon}$ -konusun yan səthinin sahəsi, H_{sl}, H_{kon} -uyğun olaraq silindrin və konusun hündürlüyü, R_{sl}, R_{kon} -silindrin və konusun oturacaqlarının radiusu, l -konusun doğuranıdır.

Silindr daxilinə çəkilmiş kürə

Tərif: Silindrin oturacaqları və bütün doğuranları kürəyə toxunarsa, onda kürəyə silindr daxilinə çəkilmiş kürə deyilir.



Yalnız bərabərtərəfli silindrin daxilinə kürə çəkmək olar. Silindr daxilinə çəkilmiş kürə üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$R_{sl} = R_{kür} = R$$

$$H = 2R$$

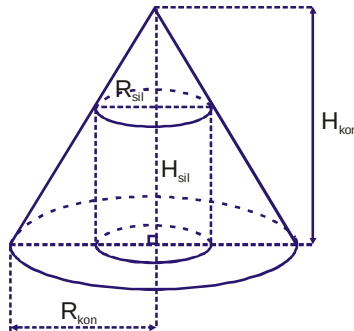
$$V_{sl} = 1,5V_{kur}$$

$$S_{y.sl} = S_{sfera}$$

Burada $S_{y.sl}, S_{sfera}$ uyğun olaraq silindrin yan səthinin sahəsi ilə sfera səthinin sahəsi, V_{sl}, V_{kur} - silindr və kürənin həcmi, $R_{sl}, R_{kür}$ - silindrin oturacaqlarının və kürənin radiusu, H - silindrin hündürlüyü.

Konus daxilinə çəkilmiş silindr

Tərif: silindrin oturacaqlarından biri konusun bütün doğuranlarına toxunan, digəri isə konusun oturacağı üzərində olarsa, belə silindrə konus daxilinə çəkilmiş silindr deyilir.



İxtiyari konusun daxilinə silindr çəkmək olar.

Düz dairəvi konus daxilinə çəkilmiş silindr üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur (l – konusun doğuranıdır):

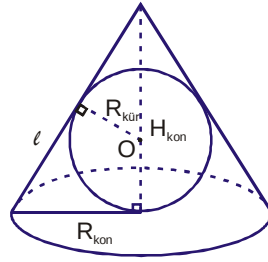
$$\frac{R_{kon}}{R_{sl}} = \frac{H_{kon}}{H_{kon} - H_{sl}}$$

$$\frac{H_{kon}}{H_{sl}} = \frac{R_{kon}}{R_{kon} - R_{sl}}$$

$$\frac{H_{kon}}{H_{sl}} = \frac{l}{l - \sqrt{R_{sl}^2 + (H_{kon} - H_{sl})^2}}$$

Konus daxilinə çəkilmiş kürə

Tərif: konusun doğuranlarına və oturacaqlarına toxunan kürəyə konus daxilinə çəkilmiş kürə deyilir.



İxtiyari konusun daxilinə kürə çəkmək olar. Konus daxilinə çəkilmiş kürə üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur (burada l – konusun doğuranıdır):

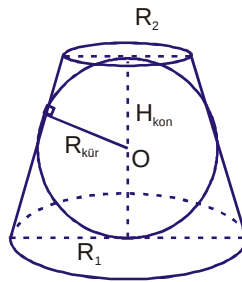
$$R_{kur} = \frac{R_{kon} H_{kon}}{l + R_{kon}}$$

$$\frac{l}{H_{kon} - R_{kur}} = \frac{R_{kon}}{R_{kur}}$$

$$R_{kon} = \sqrt{l^2 - H_{kon}^2}$$

Kəsik konus daxilinə çəkilmiş kürə

Tərif: Kəsik konusun hər iki oturacağına və doğuranlarına toxunan kürəyə konus daxilinə çəkilmiş kürə deyilir.



Ox kəsiyi daxilinə çevrə çəkmək mümkün olan ixtiyari kəsik konusun daxilinə kürə çəkmək olar. Belə kürənin diametri kəsik konusun hündürlüyünə bərabərdir. Kəsik konusun daxilinə çəkilmiş kürə üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$H_{kon} = 2R_{k22} = 2\sqrt{R_1 R_2}; l = R_1 + R_2; R_{kur}^2 = R_1 \cdot R_2$$

$$\sin \alpha = \frac{H_{kon}}{l} = \frac{2\sqrt{R_1 R_2}}{R_1 + R_2} = \frac{2R_{kur}}{l}$$

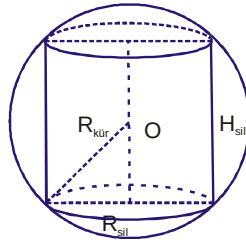
$$\cos \alpha = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 - R_2}{l}$$

$$tg \alpha = \frac{H_{kon}}{R_1 - R_2} = \frac{2\sqrt{R_1 R_2}}{R_1 - R_2} = \frac{2R_{kur}}{R_1 - R_2}$$

Burada R_1, R_2 - kəsik konusun aşağı və yuxarı oturacaqlarının radiusları, α - kəsik konusun doğuranı ilə oturacaq müstəvisi arasındakı bucaqdır.

Kürə daxilinə çəkilmiş silindr

Tərif: Oturacaqları kürənin bərabər və paralel kəsikləri olan silindrə kürə daxilinə çəkilmiş silindr deyilir.



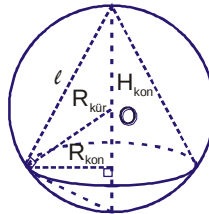
İxtiyari silindr xaricinə kürə çəkmək olar. Belə kürənin mərkəzi silindrin oturacaqlarının mərkəzlərini birləşdirən parçanın orta nöqtəsində yerləşir. Kürə daxilinə çəkilmiş silindr üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur.

$$H_{sl} = 2\sqrt{R_{kur}^2 - R_{sl}^2}$$

$$R_{sl} = \sqrt{R_{kur}^2 - \frac{H_{sl}^2}{4}}$$

Kürə daxilinə çəkilmiş konus

Tərif: Oturacağı kürə kəsiyi və təpəsi kürə səthinə aid olan konusa kürə daxilinə çəkilmiş konus deyilir.



İxtiyari kürənin daxilinə konus çəkmək olar. Kürə daxilinə çəkilmiş konus üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$R_{kur} = \frac{l^2}{2H_{kon}}$$

$$R_{kon}^2 = H_{kon}(2R_{kur} - H_{kon})$$

Burada l – konusun doğuranıdır.

NÜMUNƏLƏR:

1. $SABC$ – düzgün üçbucaqlı piramida, M – daxilə çəkilmiş kürənin toxunma nöqtəsi, O_1 – kürənin mərkəzi, $S_{ABC} = 300\sqrt{3}$, oturacağı bitişik α ikiüzlü bucağı üçün $\cos \alpha = \frac{8}{17}$, olarsa kürənin radiusunu tapın.

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Həlli:

Tutaq ki, $O_1O = R_{kürə}$, $\angle SDO = \alpha$ -dır.

$$\cos \alpha = \frac{8}{17} \text{ olduğundan, } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \frac{15}{17}$$

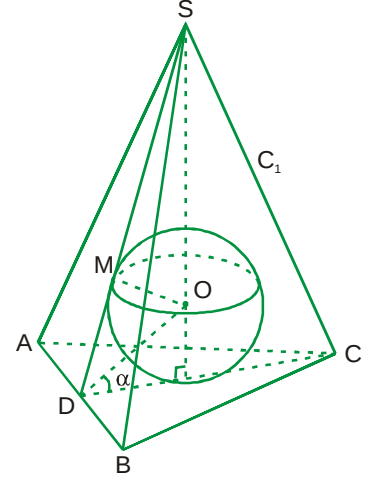
$$\text{və } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\frac{15}{17}}{1 + \frac{8}{17}} = \frac{3}{5}$$

$$\triangle DO_1O\text{-dan } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{O_1O}{DO} = \frac{R_{kür}}{OD} = \frac{3}{5}.$$

$\triangle$ Fərz edək ki, $R_{kürə} = 3x$, $OD = 5x$ -dir. O_1
Onda $OC = 10x$,

$$BC = 10 \sqrt{3} x, S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = 75 \sqrt{3} x^2 \text{ olar.}$$

Şərtə əsasən $75 \sqrt{3} x^2 = 300 \sqrt{3}$. Buradan $x = 2$ və deməli $R_{kürə} = 3x = 6$ (vahid) alınır.

Cavab: C

2. Doğuranı 12 sm olan düz dairəvi konus, radiusu 8 sm olan kürə daxilinə çəkilib. Konusun həcmi tapın.

- A) 189π B) 220π C) 226π D) 235π E) 240π

Həlli:

Məsələnin həlli – oturacağı konusun oturacağının diametrinə, yan tərəfləri konusun doğuranına bərabər olan bərabəryanlı üçbucaq xaricinə radiusu kürə radiusuna bərabər olan çevrənin çəkilməsi məsələsinin həllinə gətirilir. Tutaq ki, $OA = OB = OC = R_{kür}$, $AO_1 = O_1C = R_{kon}$. $BO_1 = H$. $AB = BC = l$ -dir. Onda:

$$R_{kür} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{\ell^2 \cdot 2R_{kon}}{4R_{kon} \cdot H} = \frac{\ell^2}{2H}$$

Digər tərəfdən düzbucaqlı $\triangle ABC$ -dən

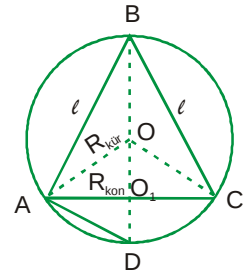
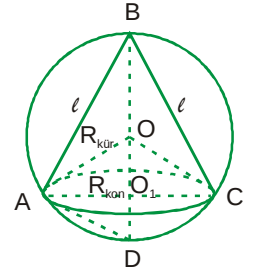
$$AO_1 = BO_1 \cdot OD \Rightarrow R_{kon}^2 = H \cdot (2R_{kür} - H)$$

Bu düsturda $\ell = 12$ sm, $R_{kür} = 8$ sm olduğunu nəzərə alaq:

$$H = \frac{\ell^2}{2R_{kür}} = \frac{12^2}{2 \cdot 8} = \frac{144}{16} = 9 \text{ sm}$$

$$R_{kon}^2 = 9(2 \cdot 8 - 9) = 9 \cdot 7 = 63 \text{ sm}^2 \text{ olar.}$$

$$\text{Onda, } V_{kon} = \frac{1}{3} \pi R_{kon}^2 \cdot H = \frac{1}{3} \pi \cdot 63 \cdot 9 = 189 \pi \text{ sm}^3$$

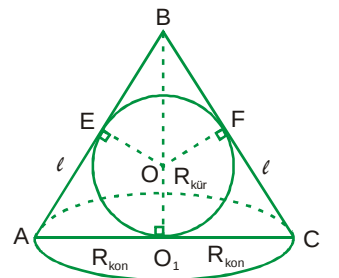
**Cavab: A**

3. Yan səthinin sahəsi $60 \pi \text{ sm}^2$, doğuranı 10 sm olan konusun daxilinə çəkilmiş kürənin həcmi tapın.

- A) 54π B) 48π C) 36π D) 27π E) 18π

Həlli:

Bu məsələnin həlli tərəflərindən biri konusun oturacağının diametri, yan tərəfləri konusun doğuranı olan bərabəryanlı üçbucağın daxilinə



radiusu kürə radiusuna bərabər olan dairənin çəkilməsi məsələsinin həllinə gətirilir.

Tutaq ki, $OO_1 = OE = OF = R_{kür}$, $AO_1 = O_1C = R_{kon}$,

$AB = BC = \ell$, $O_1B = H_{kon}$. Onda,

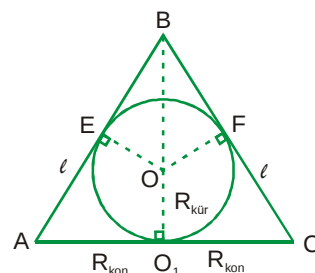
$$R_{kür} = \frac{S_{\triangle ABC}}{P} = \frac{R_{kon} \cdot H_{kon}}{2\ell + 2R_{kon}} = \frac{R_{kon} \cdot H_{kon}}{\ell + R_{kon}}$$

Bu düsturda $R_{kon} = \frac{S_{yan}}{\pi \ell} = \frac{60\pi}{\pi \cdot 10} = 6 \text{ sm}$

$H_{kon} = \sqrt{\ell^2 - R_{kon}^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \text{ sm}$ qiymətlərini nəzərə alsaq,

$$R_{kür} = \frac{6 \cdot 8}{10 + 6} = \frac{48}{16} = 3 \text{ sm}$$

$$V_{kür} = \frac{4}{3} \pi R_{kür}^3 = \frac{4}{3} \cdot 27 \pi = 36 \pi \text{ sm}^3$$



Cavab: C

4. Həcmi $324 \pi \text{ sm}^3$, hündürlüyü 12 sm olan konusun daxilinə oturacağının radiusu 3 sm olan silindr çəkilib. Silindrin yan səthinin sahəsini tapın.

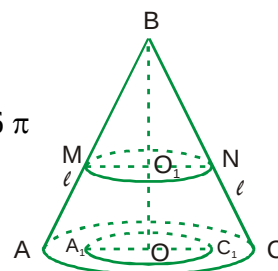
A) 10π

B) 20π

C) 36π

D) 48π

E) 56π



Həlli:

Məsələnin həlli oturacağı konusun oturacağının diametri, yan tərəfləri konusun doğuranları olan bərabəryanlı üçbucağın daxilinə tərəflərindən biri silindrin hündürlüyü, digəri silindrin oturacağının diametri olan düzbucaqlının çəkilməsi məsələsinin həllinə gətirilir.

Tutaq ki, $AO = OC = R_{kon}$, $AB = BC = \ell$, $OB = H_{kon}$,

$A_1O = OC_1 = MO_1 = O_1N = R_{sl}$,

$OO_1 = A_1M = C_1N = H_{sl}$.

Onda $\triangle ABO \sim \triangle AMA_1 \sim \triangle MBO_1$ olduğundan,

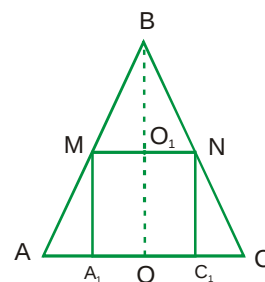
$$\frac{R_{kon}}{R_{sl}} = \frac{H_{kon}}{H_{kon} - H_{sl}} \quad \text{və} \quad \frac{H_{kon}}{H_{sl}} = \frac{R_{kon}}{R_{kon} - R_{sl}}.$$

$H_{kon} = 12$, $V_{kon} = 324 \pi$ olduğunu nəzərə alsaq.

$$V_{kon} = \frac{1}{3} \pi R_{kon}^2 \cdot H_{kon}, \quad R_{kon} = \sqrt{\frac{3V_{kon}}{\pi H_{kon}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 324 \pi}{\pi \cdot 12}} = \sqrt{81} = 9 \text{ sm alırıq.}$$

H_{sl} -in qiymətini yuxarıda verilmiş düsturlardan hər hansı biri (məsələn 1-cisi ilə) tapmaq olar:

$$\frac{9}{3} = \frac{12}{12 - H_{sl}} \Rightarrow H_{sl} = 8$$

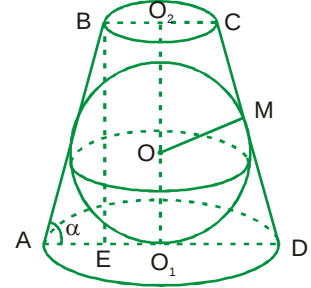


Onda, $S_{\text{yan.sl.}} = 2 \pi R_{\text{sl.}} \cdot H_{\text{sl.}} = 2 \pi \cdot 3 \cdot 8 = 48 \pi$

Cavab: D

5. Kürənin xaricinə oturacaqlarından birinin sahəsi digərinin sahəsindən dörd dəfə böyük olan kəsik konus çəkilmişdir. Konusun doğurarı ilə onun oturacaq müstəvisi arasındakı bucağın kosinusunu tapın.

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

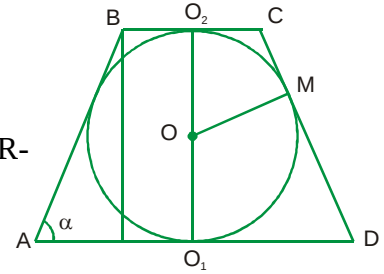


Həlli:

Kəsik konusun ox kəsiyini nəzərdən keçirək $BO_2 = O_2C = r$, $AO_1 = O_1D = R$ ilə işarə edək. Şərtə görə konusun oturacaqlarından birinin sahəsi o birindən dörd dəfə böyükdür:

$\pi R^2 = 4 \pi r^2 \Rightarrow R = 2r$. Digər tərəfdən $O_2C = CM$ və $O_1D = MD$ olduğundan, $AB = CD = R + r$ və $AE = AO_1 - O_1E = R - r$ olar.

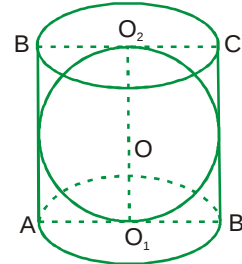
Onda, $\cos \alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{R-r}{R+r} = \frac{2r-r}{2r+r} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}$



Cavab: A

6. Silindrin daxilinə kürə çəkilmişdir. Kürənin həcmi 8π olarsa, silindrin yan səthinin sahəsini tapın.

- A) $\sqrt[3]{36}\pi$ B) $2\sqrt[3]{36}\pi$ C) $3\sqrt[3]{36}\pi$
D) $4\sqrt[3]{36}\pi$ E) $5\sqrt[3]{36}\pi$

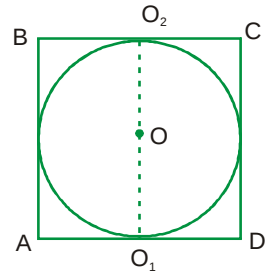


Həlli:

Silindrin ox kəsiyini nəzərdən keçirək $N = CD = 2r$,

$V_{\text{kürə}} = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow 8 \pi = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow r^3 = 6$

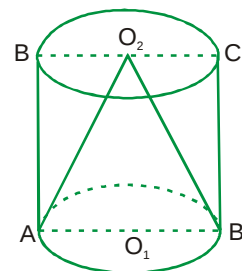
Onda, $S_{\text{s.yan}} = 2 \pi r H = 2 \pi r \cdot 2r = 4 \pi r^2 = 4 \pi \sqrt[3]{36}$



Cavab: D

7. Silindrin daxilinə həcmi onun həcmindən $16 \pi \text{ sm}^3$ qədər az olan konus çəkilmişdir. Silindr və konusun həcmələri cəmini tapın.

- A) 8π B) 12π C) 16π D) 24π E) 32π



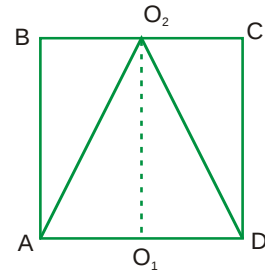
Həlli:

Silindrin həcmi ilə onun daxilinə çəkilmiş konusun
həcmi arasında olan məlum

$V_{sl}=3V_{kon}$ asılılığından və məsələnin $V_{sl}=V_{kon} + 16 \pi$
şərtindən alınan tənliklər sistemini

həll etsək, $V_{sl} = 24 \pi \text{ sm}^3$, $V_{kon} = 8 \pi \text{ sm}^3$ alarıq.

Onda $V_{sl} + V_{kon} = 32 \pi \text{ sm}^3$



Cavab: E

MÜNDƏRİCAT

PLANİMETRİYA.....	2
1. BUCAQLAR. BUCAQLARIN NÖVLƏRİ.....	2
2. ÜÇBUCAQLAR.....	12
3. ÇOXBUCAQLILAR.....	81
4. ÇEVRƏ VƏ DAİRƏ.....	98
5. KOORDİNATLAR ÜSULU.....	108
6. VEKTORLAR VƏ ONLAR ÜZƏRİNDƏ ƏMƏLƏLƏR.....	131
7. STEREOMETRİYA.....	138