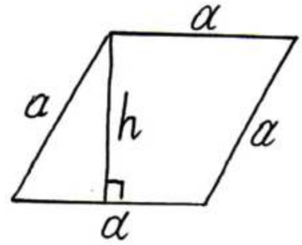
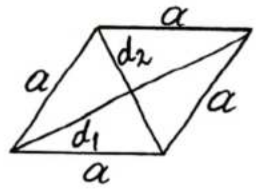
Rombun sahəsi

1) Rombun sahəsi tərəf və bu tərəfə çəkilmiş hündürlüyü hasilinə bərabərdir

$$S = ah$$

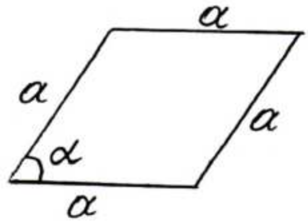


2) Rombun sahəsi diaqonalları hasilinin yarısına bərabərdir. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$



3) Rombun sahəsi iki tərəfi ilə bu tərəflər arasında qalan bucağın sinusu hasilinə bərabərdir.

$$S = a^2 \sin \alpha$$

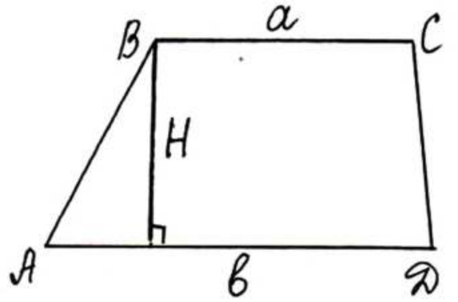


Trapesiyanın sahəsi

① Trapesiyanın sahəsi oturacaqları cəminin yarısı ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot H$$

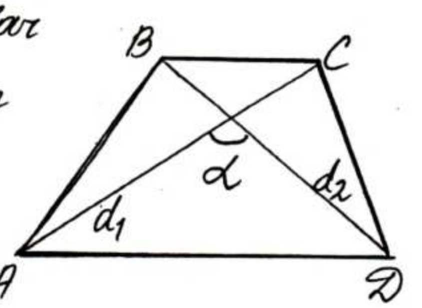
burada $\frac{a+b}{2} = m$ orta xətt olduğu üçün $S = m \cdot H$ yazmaq olar



② Trapesiyanın sahəsi orta xətti ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir.

③ Trapesiyanın sahəsi diaqonalları ilə onlar arasında qalan bucağın sinusu hasilinin yarısına bərabərdir

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$$



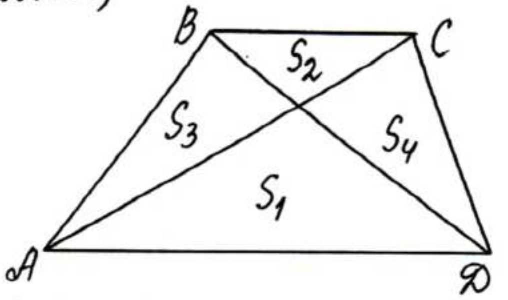
④ Bərabəryanlı trapesiyada diaqonallar perpendikulyar olduqda, orta xətt hündürlüyə bərabər olur. Onda,

$$S = H^2 = m^2 \quad (H\text{-hündürlük, } m\text{-orta xətdir})$$

⑤ Əgər, trapesiyanın diaqonalları çəkilibsə,

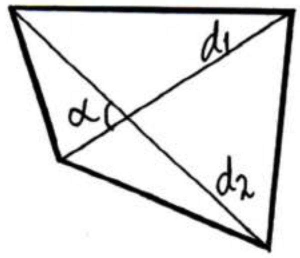
onda $S_3 = S_4 = \sqrt{S_1 \cdot S_2}$

$$S_{trapesiya} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$$



İxtiyari dördbucaqlının sahəsi

İxtiyari dördbucaqlının sahəsi onun diaqonalları ilə aralarındakı bucağın sinusu hasilinin yarısına bərabərdir



$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\alpha$$

Çoxbucaqlının sahəsi

① İxtiyari çoxbucaqlının daxilinə çevrə çəkilibsə, onun radiusu r isə, $S = \frac{1}{2} p \cdot r$ yazmaq olar. p – çoxbucaqlının perimetridir.

② Düzgün çoxbucaqlının xaricinə çevrə çəkilibsə, onun sahəsi

$$S = \frac{1}{2} n R^2 \sin\frac{360^\circ}{n}$$

$$S = n r^2 tg\frac{180^\circ}{n}$$ düsturları ilə tapılır.

Yuxarıdakı düsturda

$$R = \frac{r}{\cos\frac{180^\circ}{n}}$$ yazdıqda aşağıdakı düstur alınır.

③ Düzgün çoxbucaqlının daxilinə çevrə çəkilibsə,

onda $S = \frac{1}{2} p r$ olur, və ya $S = \frac{1}{2} n a \cdot r$

Bütün düsturlarda, r – daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu

R – xaricə çəkilmiş çevrənin radiusu

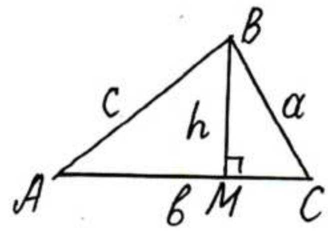
a – çoxbucaqlının bir tərəfinin uzunluğu

n – çoxbucaqlının tərəflərinin sayıdır.

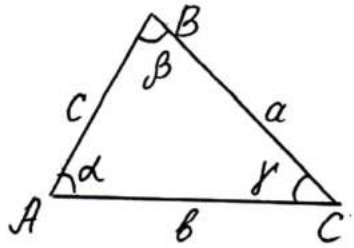
Üçbucaqların sahəsi

① Üçbucağın sahəsi bir tərəfi ilə bu tərəfə çəkilmiş hündürlüyü hasilinin yarısına bərabərdir

$$S = \frac{1}{2} |AC| \cdot |BM|$$



② Üçbucağın sahəsi iki tərəfi ilə bu tərəflər arasındakı bucağın sinusu hasilinin yarısına bərabərdir



$$S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$$

$$S = \frac{1}{2} ac \sin\beta$$

③ R - xaricə çəkilmiş çevrənin radiusu isə

$$S = \frac{abc}{4R}$$

④ r - daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu isə

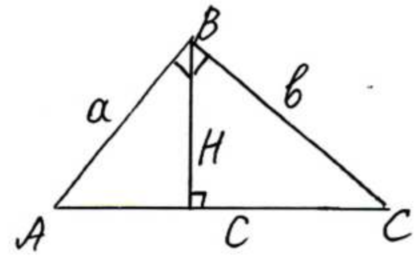
$$S = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

⑤ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ bu düstura Heron düsturu deyilir, burada $p = \frac{a+b+c}{2}$ olub, yarımperimetrdir.

a) Düzbucaqlı üçbucağın sahəsi

$$S = \frac{1}{2} ab$$

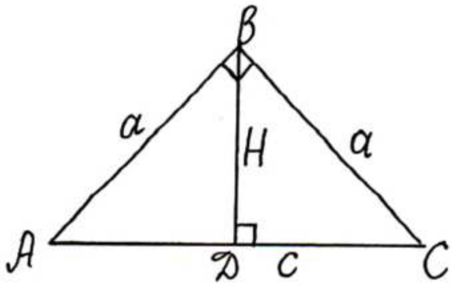
$$S = \frac{1}{2} H \cdot C$$



Düzbucaqlı üçbucağın sahəsi onun katetləri hasilinin yarısına bərabərdir.

b) bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucağın sahəsi

$$S=\frac{a^2}{2}$$
$$S=\frac{c^2}{4}$$
$$S=H^2$$

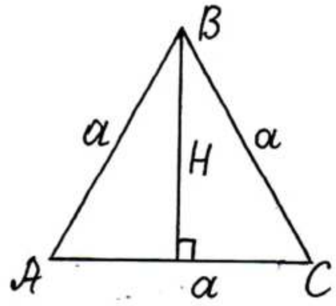


c) bərabərtərəfli üçbucağın sahəsi

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \qquad S=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$

$$S=\frac{H^2\sqrt{3}}{3} \qquad S=3\sqrt{3}r^2$$

R - xaricə çəkilmiş çevrənin
r - daxilə çəkilmiş çevrənin radiusudur

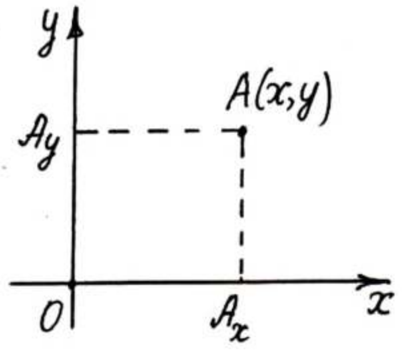


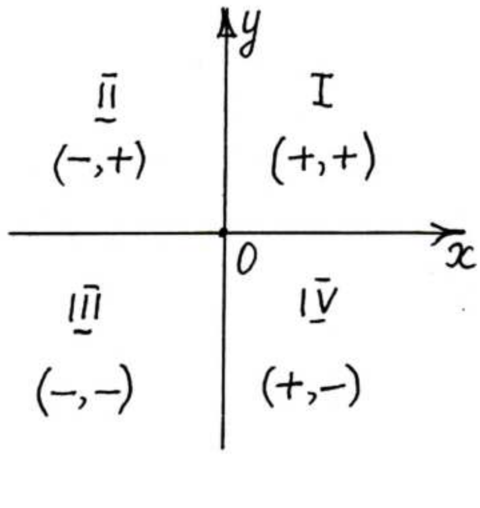
Koordinatlar sistemi

Müstəvidə O nöqtəsindən qarşılıqlı perpendikulyar iki x və y düz xətləri keçirək. x oxuna (üfiqi vəziyyətdə olana) absis oxu, y oxuna isə ordinat oxu deyilir. O kəsişmə nöqtəsinə koordinat başlanğıcı deyilir. Koordinat oxları müstəvini 4 hissəyə - rübə bölür: I, II, III, IV

Müstəvidə x və y koordinatlarını Dekart koordinatları adlandırırlar.

* x oxu (absis) üzərindəki nöqtələrin ordinatı sıfıra bərabərdir
* y oxu (ordinat oxu) üzərindəki nöqtələrin absisi sıfıra bərabərdir
* Koordinat başlanğıcının həm absisi, həm də ordinatı sıfıra bərabərdir.





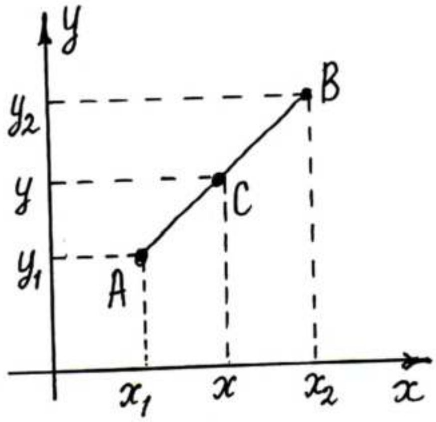
İki nöqtə arasındakı məsafə

$A(x_1;y_1)$ və $B(x_2;y_2)$ nöqtələri arasındakı məsafə aşağıdakı düsturla tapılır.

$$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Parçanın orta nöqtəsi

Uc nöqtələrinin koordinatları $A(x_1,y_1)$ və $B(x_2,y_2)$ olan $|AB|$ parçasının orta nöqtəsi $C(x;y)$ olarsa, onda

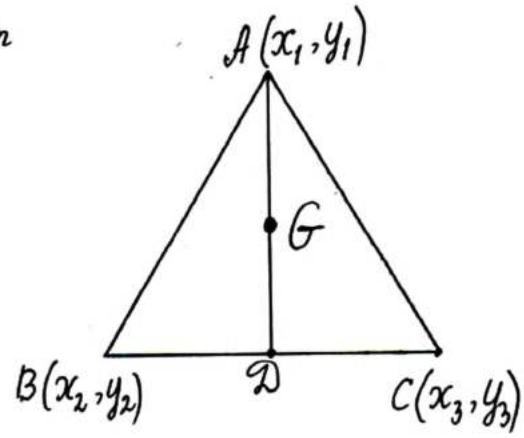


$$x = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

$$C(x;y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Üçbucağın sahəsi və ağırlıq mərkəzi

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ və $C(x_3,y_3)$ nöqtələri ΔABC-nin təpə nöqtələri, G üçbucağın ağırlıq mərkəzi, D isə BC tərəfinin orta nöqtəsi olsun. Onda



$$D(x_0;y_0) = \left(\frac{x_2+x_3}{2}; \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

$$G = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

$$S_{(ABC)} = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{matrix}\right|$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left[(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_1y_3+x_3y_2+x_2y_1)\right]$$

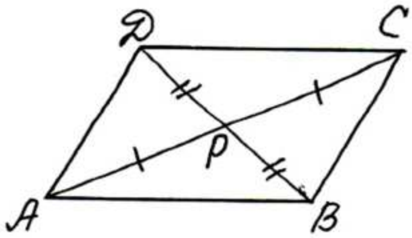
Paralelogramın orta nöqtəsi

$ABCD$ – paralelogramdır. $|AC|$ və $|BD|$-nin orta nöqtəsi P-dir.

$P(x_0;y_0)$, $A(x_4,y_4)$, $B(x_3;y_3)$, $C(x_2;y_2)$, $D(x_1;y_1)$ olarsa,

$$x_0=\frac{x_1+x_3}{2}=\frac{x_2+x_4}{2}\Rightarrow x_1+x_3=x_2+x_4$$

$$y_0=\frac{y_1+y_3}{2}=\frac{y_2+y_4}{2}\Rightarrow y_1+y_3=y_2+y_4$$



İki nöqtəsi məlum olan düz xəttin bucaq əmsalı

$A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ verilmiş nöqtələr, k isə bucaq əmsalıdır.

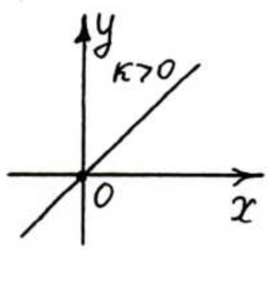
$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

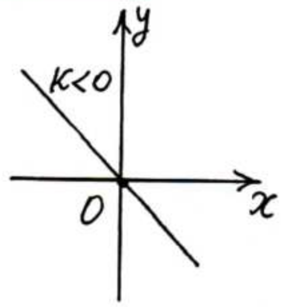
Düz xəttin tənlikləri

① **Koordinat başlanğıcından keçən düz xəttin tənliyi**

$$y=kx$$

Burada $k=tg\alpha$, α – meyl bucağıdır



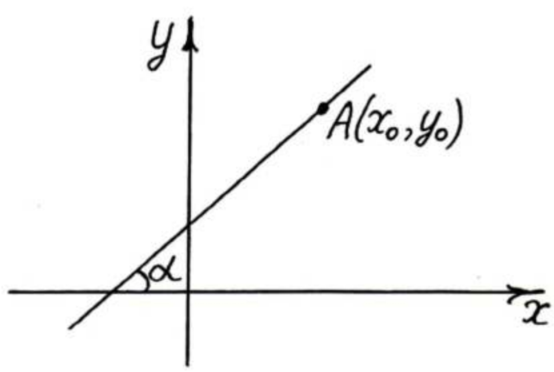


② Bir nöqtəsi və bucaq əmsalı məlum olan düz xəttin tənliyi

$A(x_0;y_0)$ və k bucaq əmsalı olan düz xəttin tənliyi aşağıdakı kimidir.

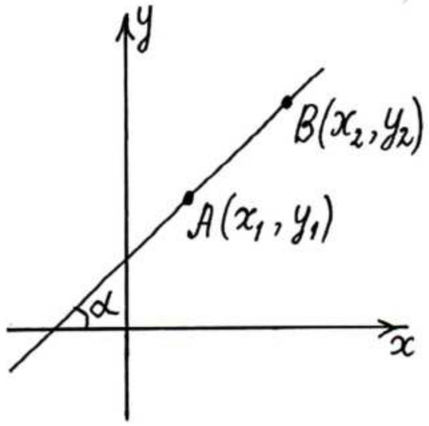
$$y=k(x-x_0)+y_0$$

$$k=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$$



③ İki nöqtədən keçən düz xəttin tənliyi

$A(x_1;y_1)$ və $B(x_2;y_2)$ nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyi aşağıdakı kimidir:



$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + b \\ y_2 = kx_2 + b \end{cases}$$ Sistemi həll edib,

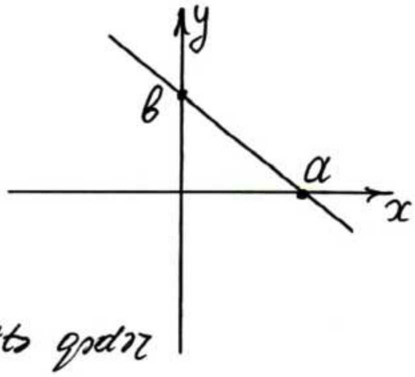
k və b tapılır və düz xəttin

$y = kx + b$ tənliyində yerinə yazılır.

k bucaq əmsalıdır, $k = tg\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

k ədədi düz xəttin absis oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucağın tangensinə bərabərdir.

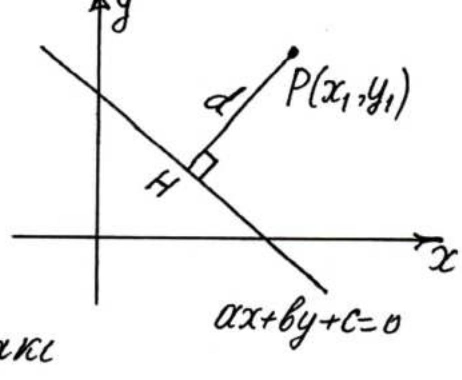
④ Düz xəttin parçalarla tənliyi



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

burada a və b düz xəttin Ox və Oy oxlarından ayırdığı parçalardır.

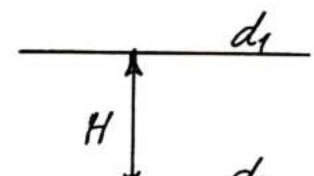
⑤ Verilmiş nöqtədən verilmiş düz xəttə qədər məsafə



$P(x_1;y_1)$ nöqtəsindən $ax + by + c = 0$ düz xəttinə qədər olan məsafə d olsun. Onda

$$d = PH = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

⑥ İki paralel düz xətt arasındakı məsafə



d_1 düz xətti $ax + by + c_1 = 0$

d_2 düz xətti $ax + by + c_2 = 0$ olsun. Onda

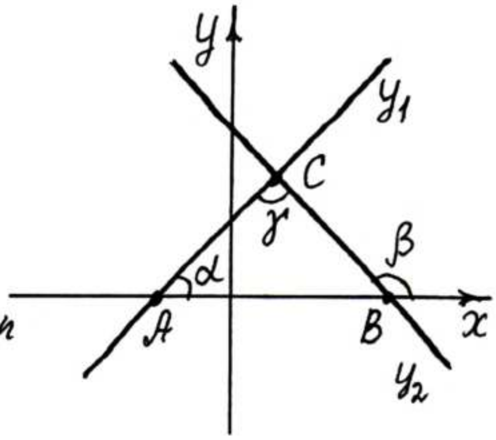
$$H = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

⑦ İki düz xətt arasındakı bucağın tapılması.

Tutaq ki, $y = k_1 x + b_1$; $k_1 = tg\alpha$

$y = k_2 x + b_2$; $k_2 = tg\beta$

düz xətləri verilib.



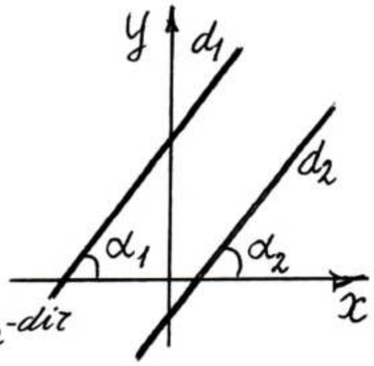
ABC üçbucağında xarici bucağın xassəsinə görə $\beta = \alpha + \gamma$ olur. Buradan

$\gamma = \beta - \alpha \Rightarrow$

$$tg\gamma = tg(\beta - \alpha) = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\beta\, tg\alpha}$$, burada $tg\alpha = k_1$, $tg\beta = k_2$

$$\boxed{tg\gamma = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}}$$

⑧ Düz xətlər arasındakı münasibətlər



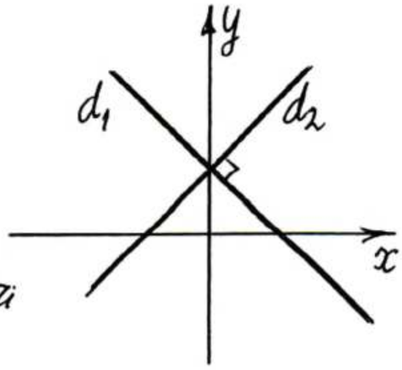
① Tutaq ki, d_1 düz xəttinin tənliyi

$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, bucaq əmsalı k_1

d_2 düz xəttinin tənliyi

$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$, bucaq əmsalı k_2-dir

Əgər $d_1 \parallel d_2$ olarsa, $tg\alpha_1 = tg\alpha_2$, $k_1 = k_2$



② $d_1 \perp d_2$ olarsa,

$tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2 = -1$, $k_1 \cdot k_2 = -1$

③ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ olarsa, d_1 və d_2 düz xətləri üst-üstə düşür, $d_1 = d_2$

④ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ olarsa, d_1 və d_2 düz xətləri paraleldir, $d_1 \parallel d_2$

$k_1 = k_2$

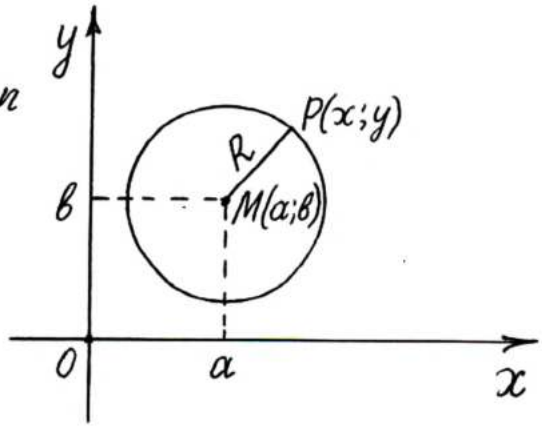
⑤ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ olarsa, d_1 və d_2 düz xətləri yalnız bir nöqtədə kəsişirlər.

Çevrənin tənliyi

① Mərkəzi $M(a;b)$ və radiusu R olan çevrənin tənliyi

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

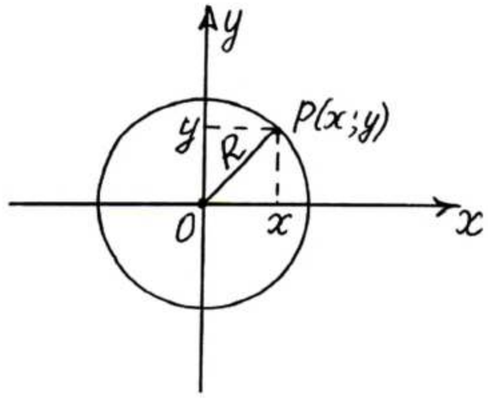
kimidir.



② Çevrənin mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşərsə, yəni $M(0;0)$ olarsa, çevrənin tənliyi

$$x^2+y^2=R^2$$

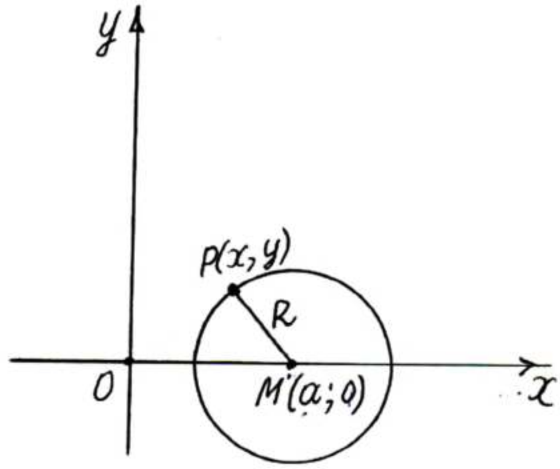
kimi olar



③ Çevrənin mərkəzi x oxu üzərindədirsə, onun tənliyi

$$(x-a)^2+y^2=R^2$$

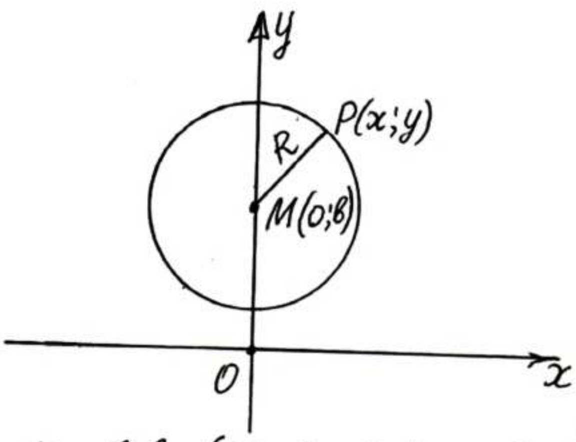
kimi olur.



④ Çevrənin mərkəzi y oxu üzərindədirsə, onun tənliyi

$$x^2+(y-b)^2=R^2$$

kimi olur.



<u>Misal 1.</u> Mərkəzi $(4;5)$ nöqtəsində olub, $(3;-2)$ nöqtəsindən keçən çevrənin tənliyini yazın.

Mərkəzi $(a;b)$ nöqtəsində olan çevrənin tənliyi $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ olduğundan

$(3-4)^2+(-2-5)^2=r^2$

$1+49=r^2$

$r^2=50 \Rightarrow (x-4)^2+(y-5)^2=50$

Məsələ 2. $A(1;2)$, $B(0;-1)$ və $C(-3;0)$ nöqtələrindən keçən çevrənin tənliyini tapın.

Nöqtələr çevrə üzərində olduqlarından, onun tənliyini ödəyirlər.

$$\begin{cases}(1-x_0)^2+(2-y_0)^2=r^2\\(0-x_0)^2+(-1-y_0)^2=r^2\\(-3-x_0)^2+(0-y_0)^2=r^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(1-x_0)^2+(2-y_0)^2=r^2\\x_0^2+(-1-y_0)^2=r^2\\(-3-x_0)^2+y_0^2=r^2\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}(1-x_0)^2+(2-y_0)^2=x_0^2+(-1-y_0)^2\\(1-x_0)^2+(2-y_0)^2=(-3-x_0)^2+y_0^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_0+3y_0=2\\2x_0+y_0=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_0=-1\\y_0=1\end{cases}$$

r^2-nın qiymətini $x_0^2+(-1-y_0)^2=r^2$ tənliyindən tapaq

$r^2=5$. Deməli, axtarılan tənlik

$(x+1)^2+(y-1)^2=5$ olur.

Məsələ 3. $x^2+y^2+2x+8y=0$ çevrəsinin radiusunu və mərkəzini tapaq.

$(x^2+2x)+(y^2+8y)=0 \Rightarrow (x+1)^2-1+(y+4)^2-16=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1)^2+(y+4)^2=(\sqrt{17})^2$ deməli

Çevrənin mərkəzi $(-1;-4)$, radiusu isə $\sqrt{17}$-dir.

Məsələ 4. $(x-2)^2+(y-4)^2=R^2$ çevrəsi $A(1;2)$ nöqtəsindən keçərsə, radiusunu tapın

$A(1;2)$ nöqtəsi $(x-2)^2+(y-4)^2=R^2$ çevrəsi üzərindədirsə,

$(1-2)^2+(2-4)^2=R^2 \Rightarrow R^2=1+4 \Rightarrow R=\sqrt{5}$

Məsələ 5. Mərkəzi $x^2-4y+5+y^2-6x=0$ çevrəsinin mərkəzi ilə eyni olub, $(3;4)$ nöqtəsindən keçən çevrənin tənliyini yazın.

Həlli

$x^2-4y+5+y^2-6x=0$ çevrəsinin mərkəzini tapaq

$$x^2-6x+y^2-4y+5=0$$

$$(x-3)^2-9+(y-2)^2-4+5=0$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2=8$$

Çevrənin mərkəzi $(3;2)$ nöqtəsidir. İndi mərkəzi $(3;2)$ nöqtəsi olub $(3;4)$ nöqtəsindən keçən çevrənin tənliyini yazaq

$$(3-3)^2+(4-2)^2=r^2$$

$$0+4=r^2$$

$$r^2=4$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2=4$$

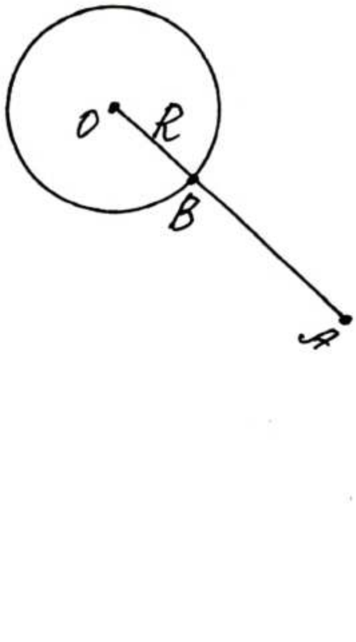
Məsələ 6. $A(2;3)$ nöqtəsindən $(x-5)^2+(y-7)^2=4$ çevrəsinə qədər olan ən qısa məsafəni tapın.

Həlli

Şərtə görə çevrənin mərkəzi $(5;7)$ nöqtəsidir.

radius isə $r=2$-dir.

AO məsafəsini tapaq.



$O(5;7)$ və $A(2;3)$ olduğu üçün

$$|AO|=\sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2}=5$$

$$AB=AO-R=5-2=3$$

Cavab: 3

Vektor anlayışı.

Yalnız ədədi qiyməti ilə xarakterizə olunan kəmiyyətlərə skalyar kəmiyyətlər və ya skalyarlar deyilir. Məsələn, temperatur, kütlə, həcm, sıxlıq və s.

Ədədi qiymətindən başqa, həm də istiqaməti ilə xarakterizə olunan kəmiyyətə vektorial kəmiyyət və ya vektorlar deyilir. Məsələn, qüvvə, yerdəyişmə, sürət, təcil və s.

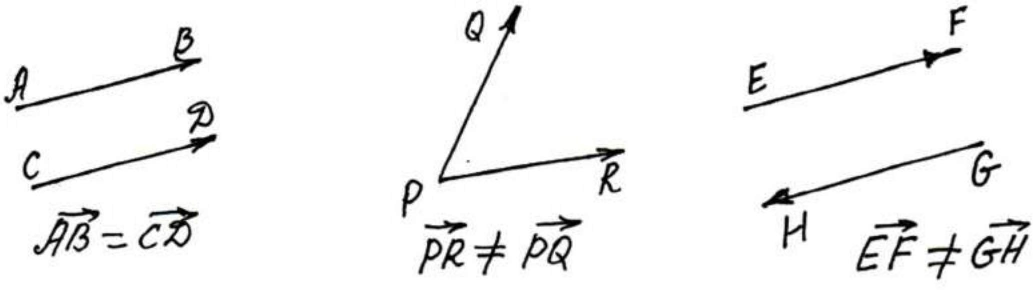
Həndəsi olaraq vektor fəzanın istiqamətlənmiş parçası ilə təsvir olunur və belə işarə olunur: $\vec{AB}$, $\vec{CD}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$. Vektor iki hərflə işarə olunduqda 1-ci hərf onun başlanğıcını, 2-ci hərf isə sonunu göstərir.

Vektorun ədədi qiymətinə onun mütləq qiyməti və ya modulu (uzunluğu) deyilir. $|\vec{a}|$, $|\vec{AB}|$ kimi işarə olunur.

Başlanğıcı və sonu üst-üstə düşən, yəni modulu sıfra bərabər olan vektora sıfır vektor deyilir: $\vec{0}$

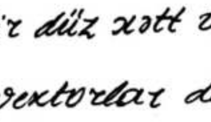
Uzunluğu birə bərabər olan vektora vahid vektor deyilir.

Uzunluqları və istiqamətləri eyni olmaqla bir düz xətt və ya paralel düz xətlər üzərində yerləşən vektorlara bərabər vektorlar deyilir.



Uzunluğu və istiqaməti saxlanmaqla fəzanın ixtiyari nöqtəsinə köçürülə bilən vektora sərbəst vektor deyilir. Sərbəst vektorları həmişə eyni başlanğıca gətirmək olar.

Uzunluğu vektorun uzunluğuna bərabər, istiqaməti onun əksinə olan vektora əks vektor deyilir. $\vec{a}+(-\vec{a})=0$

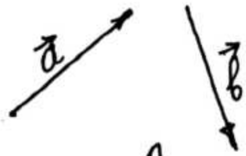


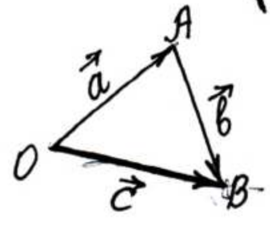
Bir düz xətt və ya paralel düz xətlər üzərində yerləşən vektorlara kollinear vektorlar deyilir. Sıfır vektorun istiqaməti ixtiyari olduğundan, onu ixtiyari vektora kollinear hesab etmək olar.

Bir müstəvi və ya paralel müstəvilər üzərində yerləşən vektorlara komplanar vektorlar deyilir. Sıfır vektor istənilən vektorla kollinear, iki vektorla isə komplanardır.

Vektorların toplanması, çıxılması və ədədə vurulması

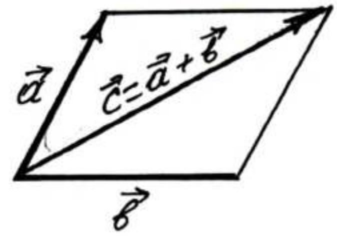
1) Tutaq ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları verilib. İxtiyari O nöqtəsi qeyd edib, əvvəlcə $\vec{OA}=\vec{a}$ vektorunu, sonra isə $\vec{AB}=\vec{b}$ vektorunu ayıraq. Birinci vektorun başlanğıcını ikinci vektorun sonu ilə birləşdiririk. Alınan $\vec{c}$ vektoruna bu vektorların cəmi deyilir və $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ kimi yazılır. Bu qaydaya vektorların toplanması üçbucaq qaydası deyilir.





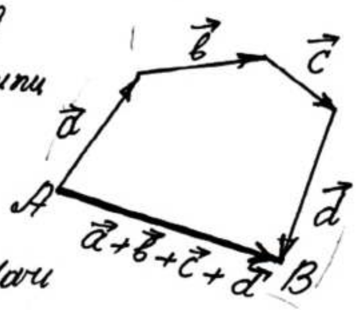
2) $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları üzərində qurulmuş paraleloqramın diaqonalı $\vec{c}$, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının cəminə bərabərdir. $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$

Buna paraleloqram qaydası deyilir.

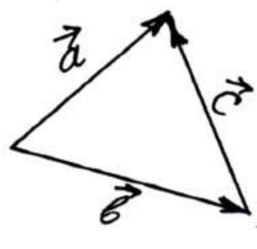


3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, vektorlarının cəmini tapmaq üçün onları ardıcıl birləşdirmək, $\vec{AB}$ vektorunu cəm kimi götürmək lazımdır.

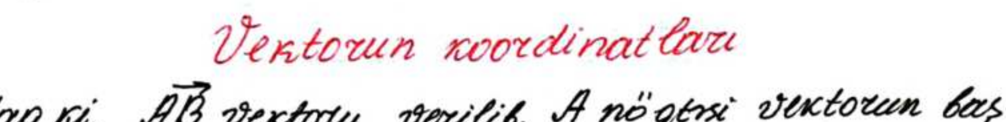
$$\vec{AB}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$$



(4) $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarını çıxmaq üçün bu vektorları bir başlanğıca gətirirlər. $\vec{b}$ vektorunun sonundan $\vec{a}$ vektorunun sonuna doğru yönələn vektor $\vec{a}-\vec{b}$ olur. $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$



(5) Vektorun ədədə hasilinin mənasını əyani olaraq belə ifadə etmək olar: $\vec{a}$ vektoru λ ədədinə vurulduqda vektor λ dəfə dartılır. $\lambda>0$ olduqda dartılan vektorun istiqaməti $\vec{a}$ vektorunun istiqaməti ilə eyni, $\lambda<0$ olduqda isə əksinə olur.

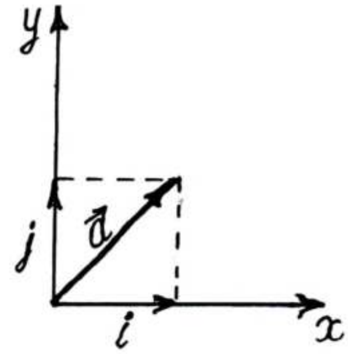


Vektorun koordinatları

Tutaq ki, $\vec{AB}$ vektoru verilib. A nöqtəsi vektorun başlanğıcı, B nöqtəsi isə sonudur. $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$

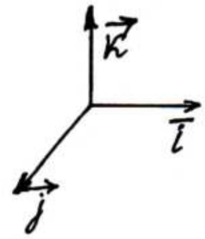
Vektorun son və başlanğıc nöqtələrinin uyğun koordinatları fərqinə vektorun koordinatları deyilir. $\vec{AB}(x_2-x_1;y_2-y_1)$

Başlanğıc nöqtəsi koordinat başlanğıcı ilə üst-üstə düşən $\vec{a}$ vektorunu $\vec{a} = a_x \cdot i + b_x j$ şəklində yazmaq olar.



Vektorun bu şəkildə yazılışına onun oxlar üzrə ayrılışı deyilir. Vektorun koordinat oxları üzrə proyeksiyaları a_x və a_y onun koordinatları adlanır və $\vec{a}(a_x, a_y)$ kimi yazılır.

$\vec{i}$ vektoru OX oxu, $\vec{j}$ vektoru OY oxu, $\vec{k}$ vektoru OZ oxu üzərində yerləşir.



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlarına koordinat ortları deyilir.

İstənilən a vektorunu

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$ kimi yazmaq

olar, bu zaman a_x, a_y, a_z vektorun koordinatlarıdır.

$$\vec{i}(1;0;0) \quad \vec{j}(0;1;0) \quad \vec{k}(0;0;1)$$

Misal.1. $M(2;-7)$, $N(-1;3)$ və $P(4;1)$ üçbucağın təpə nöqtələri olduqda $\vec{MN}$, $\vec{NP}$ və $\vec{PM}$ vektorlarının koordinatlarını tapın

$$MN = (-1-2;\ 3-(-7)) \Rightarrow \vec{MN}(-3;10)$$

$$\vec{NP} = (4-(-1);\ 1-3) \Rightarrow \vec{NP}(5;-2)$$

$$\vec{PM} = (-2;-8)$$

Misal.2 $\vec{MN} = (-4;5)$ və $M(3;-1)$ olduğunu bilərək, vektorun son nöqtəsini təyin edin.

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = -4 \\ y_2 - y_1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = -1 \end{cases} \text{olduğundan} \quad \begin{matrix} x_2 = x_1 - 4 = 3 - 4 = -1 \\ y_2 = y_1 + 5 = -1 + 5 = 4 \end{matrix}$$

Beləliklə, son nöqtə $N(-1;4)$ olur.

Misal 3. Aşağıdakı vektorları $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorları ilə ifadə edin

a) $\vec{a} = (-3;2) \Rightarrow \vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$

b) $\vec{b} = \vec{AB} \quad A(4;-3)\ B(-2;1) \Rightarrow \vec{AB} = (-2-4;\ 1-(-3)) \Rightarrow \vec{AB} = (-6;4)$

$$\vec{AB} = \vec{b} = -6\vec{i} + 4\vec{j}$$

Koordinatları ilə verilmiş vektorlar üzərində əməllər.

(1) Tutaq ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları öz koordinatları ilə verilib.

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$

Vektorlar toplanarkən (çıxılarkən), eyni adlı koordinatlar toplanır və ya çıxılır.

$$\vec{a}+\vec{b}\,(x_1+x_2;\, y_1+y_2;\, z_1+z_2)$$

$$\vec{a}-\vec{b}\,(x_1-x_2;\, y_1-y_2;\, z_1-z_2) \text{ olur.}$$

(2) Vektor ədədə vurularkən onun bütün koordinatları həmin ədədə vurulur. $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ vektorunu λ ədədinə vurduqda

$$\lambda\vec{a}\,(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \text{ olur.}$$

(3) İki vektor bərabərdirsə, onda onların uyğun koordinatları da bərabər olmalıdır.

$\vec{a}(x_1, y_1; z_1)$ və $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorları bərabərdirsə, onda

$$x_1 = x_2 \; ; \; y_1 = y_2 \; ; \; z_1 = z_2 \text{ olur.}$$

(4) Tutaq ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları öz koordinatları ilə verilib.

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ və $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$

Bu vektorlar o vaxt kollinear (paralel) olar ki,

$\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$ olsun. Buna kollinearlıq şərti deyilir.

(5) Tutaq ki, $\vec{a}$ vektoru öz koordinatları ilə verilib. $\vec{a}(x, y, z)$

Onda vektorun uzunluğu (modulu) belə tapılır.

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

(6) $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının uzunluqları ilə onlar arasındakı bucağın kosinusu hasilinə bərabər olan ədədə bu vektorların skalyar hasili deyilir $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$

Xassələri: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 \text{ və ya } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$$

Koordinatları ilə verilmiş $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ və $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlarının skalyar hasili $(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ kimidir

7. İki vektor o vaxt perpendikulyar olur ki, onların skalyar hasili sıfıra bərabər olsun.

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ və $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorları o vaxt perpendikulyar olur ki, $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$ olsun. Buna iki vektorun ortoqonallıq şərti deyilir.

8. Tutaq ki, $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ və $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorları verilib. Onda onların aralarındakı bucaq belə tapılır.

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

başqa sözlə, surətdə skalyar hasil,

məxrəcdə isə bu vektorların uzunluqları hasili yazılır.

Qeyd. $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

Misal 1. $\vec{a}(3; -7)$ vektorunun uzunluğunu tapın

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+(-7)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$$

Misal 2. $A(2; -3)$, $B(-4; 5)$ olarsa, $\vec{AB}$ vektorunu və onun uzunluğunu tapın.

$$\vec{AB}(-4-2; 5-(-3)) \Rightarrow \vec{AB}(-6; 8) \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{(-6)^2+8^2} = 10$$

Misal 3. $\vec{a}(2; 1)$, $\vec{b}(3; -5)$ olarsa, $2\vec{a} + 3\vec{b}$ vektorunun uzunluğunu tapın.

$$2\vec{a} = 2 \cdot (2; 1) \Rightarrow 2\vec{a}\,(4; 2)$$

$$3\vec{b}\,(9; -15)$$

$$2\vec{a} + 3\vec{b}\,(13; -13)$$

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{13^2+(-13)^2} = \sqrt{2 \cdot 169} = 13\sqrt{2}$$

Misal 4. $\vec{a}(x; 2; -1)$ və $\vec{b}(1; 0; 6)$ vektorları perpendikulyardır, $x = ?$

Vektorlar o vaxt perpendikulyar olur ki, skalyar hasil sıfır olsun.

$$x \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow x = 6.$$

Misal 5. $\vec{a}(4; 5)$ və $\vec{b}(3; -2)$ verilib. Skalyar hasili tapın

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 4 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) = 12 - 10 = 2$$

Misal 6. $\vec{a}(-3;4)$, $\vec{b}(a;7)$ verilib və $\vec{a} \parallel \vec{b}$ olarsa, a-nı tapın

$$\frac{-3}{a} = \frac{4}{7} \Rightarrow 4a = -21 \Rightarrow a = -\frac{21}{4}$$

Misal 7. m-in hansı qiymətində $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ və $\vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ vektorları perpendikulyardır?

$$3\cdot m + 3\cdot 1 + 4\cdot 0 = 0 \Rightarrow 3m = -3 \Rightarrow m = -1.$$

Misal 8. $\vec{a}(4;5;6)$, $\vec{b}(1;5;2)$ olduqda $\vec{a}+\vec{b}$ və $\vec{a}-\vec{b}$ vektorları arasındakı bucağı tapın

$$\vec{a}+\vec{b} = (4+1;\ 5+5;\ 6+2) = (5;10;8)$$

$$\vec{a}-\vec{b} = (4-1;\ 5-5;\ 6-2) = (3;0;4)$$

Onda $\cos\varphi = \dfrac{5\cdot 3 + 10\cdot 0 + 8\cdot 4}{\sqrt{5^2+10^2+8^2}\sqrt{3^2+0^2+4^2}} = \dfrac{47}{5\sqrt{189}}$

$$\varphi = \arccos\frac{47}{5\sqrt{189}}$$

Misal 9. $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasındakı bucaq $\frac{\pi}{3}$ olarsa, $3\vec{a}-2\vec{b}$ və $5\vec{a}-6\vec{b}$ vektorlarının skalyar hasilini tapın.

$$(3\vec{a}-2\vec{b})(5\vec{a}-6\vec{b}) = 15\vec{a}\cdot\vec{a} - 18\vec{a}\vec{b} - 10\vec{a}\vec{b} + 12\vec{b}\vec{b} =$$

$$= 15|\vec{a}|^2 - 28\vec{a}\cdot\vec{b} + 12|\vec{b}|^2 = 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 =$$

$$= 15\cdot 16 - 28\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{1}{2} + 12\cdot 36 = 336$$

Misal 10. $A(2;1;1)$ $B(2;2;0)$ $C(1;1;0)$ nöqtələri verilib. $BAC = \alpha$ bucağını tapın.

$$\vec{AB} = (0;1;-1) \qquad \vec{AC} = (-1;0;-1)$$

Onda $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{AB},\vec{AC})}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|} = \dfrac{0\cdot(-1) + 1\cdot 0 + (-1)\cdot(-1)}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{(-1)^2+0^2+(-1)^2}} = \dfrac{1}{2}$

$$\varphi = \arccos\frac{1}{2} = 60^\circ$$

Misal 11. $\vec{a}(-2;-1;1)$ vektorunun $\vec{e}_1(2;0;0)$, $\vec{e}_2(0;-2;0)$ və $\vec{e}_3(0;0;-2)$ vektorları üzrə $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3$ ayrılışındakı $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ədədləri üçün $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ cəmini tapın

$\vec{a}=\lambda_1\bar{e}_1+\lambda_2\bar{e}_2+\lambda_3\bar{e}_3$ olduğu üçün

$(-2;-1;1)=\lambda_1(2;0;0)+\lambda_2(0;-2;0)+\lambda_3(0;0;-2)$

Vektorlar bərabərdirsə, uyğun koordinatları da bərabər olur.

$-2=2\lambda_1 \qquad -1=-2\lambda_2 \qquad 1=-2\lambda_3$

$\lambda_1=-1 \qquad \lambda_2=\frac{1}{2} \qquad \lambda_3=-\frac{1}{2}$

$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1$

Misal 12. Əks istiqamətli $\vec{n}$ və $\vec{m}$ vektorları verilib. $|\vec{n}|=3\sqrt{10}$ və $\vec{m}(3;9;0)$ olarsa, $\vec{n}$ vektorunun koordinatları cəmini tapın.

Həlli

Şərtə görə $\vec{n}$ və $\vec{m}$ vektorları əksistiqamətlidir. Onda

$\vec{n}=-\lambda\vec{m}$ Buradan

$|\vec{n}|=|-\lambda||\vec{m}|$

$3\sqrt{10}=|\lambda|\sqrt{3^2+9^2+0^2}$

$3\sqrt{10}=|\lambda|\cdot\sqrt{9\cdot10} \Rightarrow 3\sqrt{10}=|\lambda|\cdot3\sqrt{10} \Rightarrow |\lambda|=1.$ Əks istiqamətli olduğu üçün $\lambda=-1$ götürülür. Onda

$\vec{n}(-3;-9;0)$ alarıq. Buradan isə

$-3+(-9)+0=-12$ alınar.

Misal 13. $\vec{a}(3;2)$ vektorunu $\vec{b}(0;2)$ və $\vec{c}(1;0)$ vektorları üzrə ayırın.

$\vec{a}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$

Onda $(3;2)=\alpha(0;2)+\beta(1;0)$

iki vektor o vaxt bərabər olur ki, uyğun koordinatları bərabər olsun. Onda

$\begin{cases}\alpha\cdot0+1\cdot\beta=3\\ \alpha\cdot2+0\cdot\beta=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta=3\\ 2\alpha=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta=3\\ \alpha=1\end{cases}$. Bu qiymətləri

$\vec{a}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$ ifadəsində yerinə yazaq. Onda alarıq ki, $\vec{a}=1\cdot\vec{b}+3\cdot\vec{c}$

$\vec{a}=\vec{b}+3\vec{c}$

STEREOMETRİYA

Fəzada düz xətlər və müstəvilər

Həndəsə iki bölməyə ayrılır: *planimetriya* və *stereometriya.*

Planimetriyada öyrənilən bütün fiqurlar bir müstəvi üzərində yerləşir.

Stereometriyada isə fəza fiqurlarını öyrənilir. *Stereos*-fəza, *metreo*-ölçürəm deməkdir.

Stereometriyada üç anlayış: ***nöqtə***, ***düz xətt*** və ***müstəvi*** tərifsiz qəbul olunur. Bu anlayışlar əsas anlayışlardır. Əsas anlayışların ən mühüm xassələri stereometriya aksiomlarında ifadə olunur.

1. Stereometriya aksiomları

Aksiom 1

(Planimetriya aksiomu)

Planimetriyanın bütün aksiomları və teoremləri fəzanın hər bir müstəvisində doğrudur.

Aksiom 2

(Aidlik aksiomu)

Fəzada düz xətlər və müstəvilər var. Hər bir düz xəttə və hər bir müstəviyə aid olan və aid olmayan nöqtələr var.

Aksiom 3

(Müstəvi aksiomu)

Bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtədən bir və yalnız bir müstəvi keçirmək olar.

Aksiom 4

(Müstəvilərin kəsişmə aksiomu)

İki müxtəlif müstəvinin ortaq nöqtəsi varsa, onlar bu nöqtədən keçən düz xətt boyunca kəsişirlər.

Aksiom 5

(Fəzanın bölünməsi aksiomu)

Fəzadakı hər müstəvi fəzanın bu müstəviyə aid olmayan nöqtələrini aşağıdakı şərti ödəyən iki çoxluğa ayırır:

1. Eyni çoxluğa aid olan ixtiyari iki nöqtəni birləşdirən parça bu müstəvini kəsmir.
2. Müxtəlif çoxluqlara aid olan istənilən iki nöqtəni birləşdirən parça müstəvini kəsir.

2. Stereometriya aksiomlarından alınan nəticələr

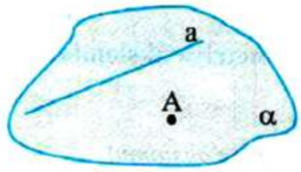
Teorem 1

(Düz xəttin müstəviyə aidliyi)

Düz xətlə müstəvinin iki ortaq nöqtəsi varsa, bu düz xətt müstəvi üzərindədir.

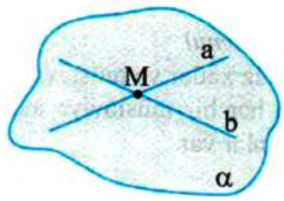
Teorem 2

Düz xətt və ona aid olmayan nöqtədən bir və yalnız bir müstəvi keçir.



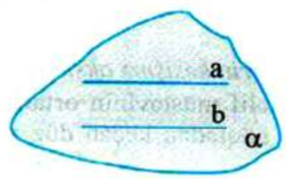
Teorem 3

İki kəsişən düz xətdən bir və yalnız bir müstəvi keçir.



Teorem 4

Fəzada iki paralel düz xətdən bir və yalnız bir müstəvi keçir.



a||b

Teorem 5

Fəzada düz xətt xaricində götürülmüş nöqtədən həmin düz xəttə paralel bir və yalnız bir düz xətt keçir.

Teorem 6

(Düz xətlərin paralellik əlaməti)

Eyni bir düz xəttə paralel olan iki düz xətt paraleldir.

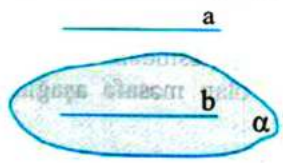
Nəticə: İki paralel düz xətdən keçən müstəvilər kəsişirlərsə, onların kəsişmə xətti bu düz xətlərin hər birinə paraleldir.

Ortaq nöqtəsi olmayan düz xətt və müstəviyə paralel düz xətt və müstəvi deyilir.

Teorem 7

(Düz xəttin müstəviyə paralellik əlaməti)

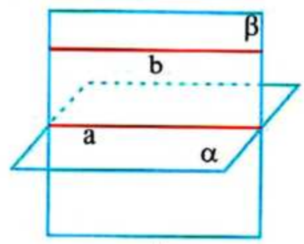
Müstəvi üzərində olmayan düz xətt, müstəvi üzərindəki hər hansı bir düz xəttə paraleldirsə, onda bu müstəvinin özünə də paraleldir.



$a \parallel b \Rightarrow a \parallel \alpha$

Teorem 8

Bir müstəvi ikinci müstəviyə paralel olan düz xətdən keçib və onu kəsərsə, alınan kəsişmə xətti verilən düz xəttə paralel olar.



a||b

3. Fəzada düz xətlərin qarşılıqlı vəziyyəti

1. Kəsişən düz xətlər

Tərif: Bir ortaq nöqtəsi olan iki düz xəttə kəsişən düz xətlər deyilir.

2. Paralel düz xətlər

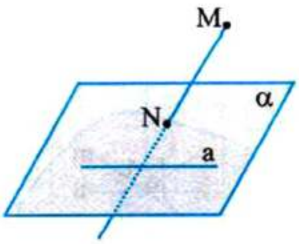
Tərif: Bir müstəvi üzərində olan və kəsişməyən düz xətlərə paralel düz xətlər deyilir.

3. Çarpaz düz xətlər

Tərif: Fəzada kəsişməyən və bir müstəvi üzərində yerləşməyən iki düz xəttə çarpaz düz xətlər deyilir.

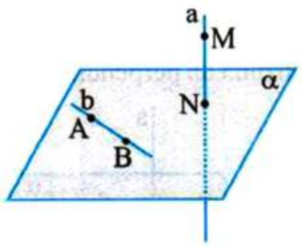
Teorem 9

İki düz xətdən biri ikincidən keçən hər hansı bir müstəvini ikinci düz xəttə aid olmayan nöqtədə kəsərsə, onda bu düz xətlər çarpazdır.



Teorem 10

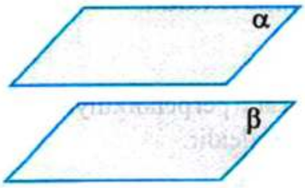
İki düz xəttin bir müstəvi üzərində olmayan dörd nöqtəsi varsa, onda bu düz xətlər çarpazdır.



4. Fəzada müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyəti

Paralel müstəvilər

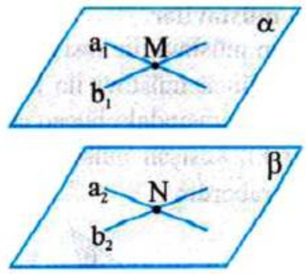
Tərif: Kəsişməyən müstəvilərə paralel müstəvilər deyilir.



$\alpha \| \beta$

Teorem 11

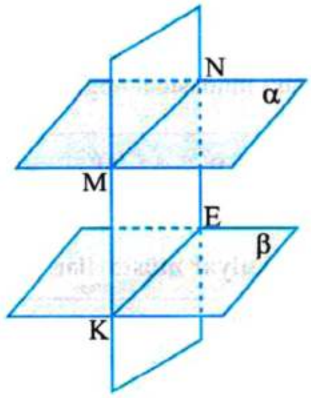
Bir müstəvinin iki kəsişən düz xətti, uyğun olaraq, o biri müstəvinin iki kəsişən düz xəttinə paraleldirsə, bu müstəvilər paraleldir.



$$\left.\begin{array}{l} a_1 \| a_2 \\ b_1 \| b_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \| \beta$$

Teorem 12

İki paralel müstəvini üçüncü müstəvi kəsirsə, alınan kəsişmə xətləri paraleldir.



$\alpha \| \beta \Rightarrow MN \| KE$

Teorem 13

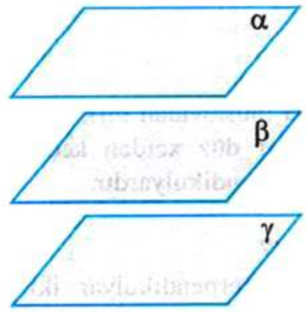
Paralel düz xətlərin paralel müstəvilər arasında qalan parçaları bərabərdir.

Teorem 14

Müstəvi xaricində götürülmüş nöqtədən həmin müstəviyə paralel bir və yalnız bir müstəvi keçir.

Teorem 15

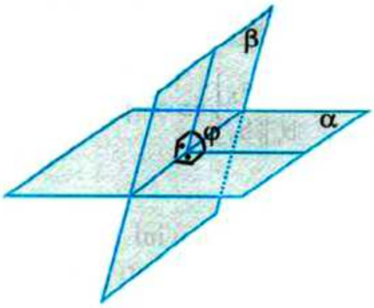
İki müstəvi üçüncü müstəviyə paraleldirsə, onda bu müstəvilər paraleldir.



$$\left.\begin{array}{l} \alpha \| \gamma \\ \beta \| \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \| \beta \| \gamma$$

Kəsişən müstəvilər

İki kəsişən müstəvinin kəsişmə xəttinə perpendikulyar üçüncü müstəvi ilə kəsişməsindən alınan düz xətlər arasındakı bucaq φ-yə bərabərdirsə, deyilir ki, kəsişən müstəvilər arasındakı bucaq φ-yə bərabərdir.

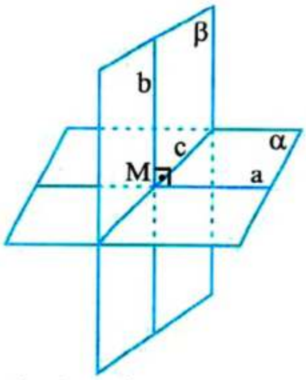


Kəsişən iki müstəvi arasındakı φ bucağı üçün aşağıdakı münasibət doğrudur.

$$0^0 \le \varphi \le 90^0$$

Perpendikulyar müstəvilər

Tərif: Kəsişən iki müstəvi arasındakı bucaq düz bucaq olduqda, onlara perpendikulyar müstəvilər deyilir.



$\angle(\alpha\beta) = 90^0$ və ya $\alpha \perp \beta$

Teorem 16

Əgər iki müstəvidən biri, o biri müstəviyə perpendikulyar düz xətdən keçərsə, onda bu müstəvilər perpendikulyardır.

Teorem 17

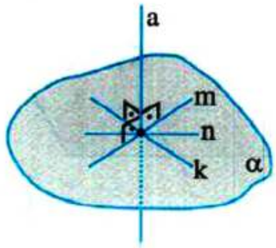
Qarşılıqlı perpendikulyar iki müstəvidən birinin üzərində, onların kəsişmə xəttinə (c düz xətti) perpendikulyar çəkilmiş düz xətt, ikinci müstəviyə perpendikulyardır.

5. Düz xəttin müstəviyə perpendikulyarlığı

Tərif: Müstəvini kəsən və onun üzərindəki hər bir düz xəttə perpendikulyar olan düz xəttə müstəviyə perpendikulyar düz xətt deyilir.

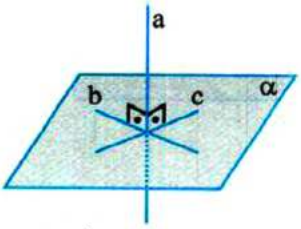
Teorem 18

Müstəvini kəsən düz xətt müstəvi üzərində olub, düz xətt və müstəvinin kəsişmə nöqtəsindən keçən ixtiyari düz xəttə perpendikulyar olarsa, bu düz xətt müstəviyə perpendikulyardır.



Teorem 19

Müstəvini kəsən düz xətt, onun üzərindəki iki kəsişən düz xəttə perpendikulyardırsa, müstəvinin özünə də perpendikulyardır.



$$\left.\begin{array}{l} a \perp b \\ a \perp c \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp \alpha$$

Teorem 20

Fəzanın verilmiş nöqtəsindən keçən və verilmiş düz xəttə perpendikulyar olan bir və yalnız bir müstəvi vardır.

Teorem 21

Bir düz xəttə perpendikulyar olan müstəvilər bir - birinə paraleldir.

Teorem 22

Fəzanın ixtiyari nöqtəsindən verilmiş müstəviyə perpendikulyar bir və yalnız bir düz xətt keçirmək olar.

Teorem 23

Paralel düz xətlərdən birinə perpendikulyar olan müstəvi, onların hər birinə perpendikulyardır.

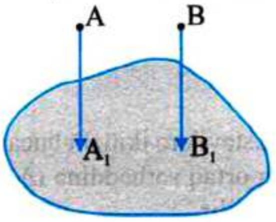
Teorem 24

Bir müstəviyə perpendikulyar olan düz xətlər paraleldir.

6. Düz xətlə müstəvi arasındakı bucaq

İstiqaməti proyeksiya müstəvisinə perpendikulyar olan paralel proyeksiyaya ortoqonal proyeksiya deyilir.

Şəkildə ortoqonal proyeksiyada A və B nöqtələrinin A_1 və B_1 proyeksiyaları göstərilmişdir.

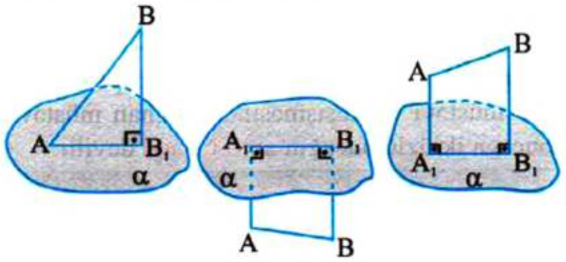


Buradan görünür ki, nöqtələrin müstəvi üzərindəki proyeksiyaları bu nöqtələrin özləridir.

QEYD

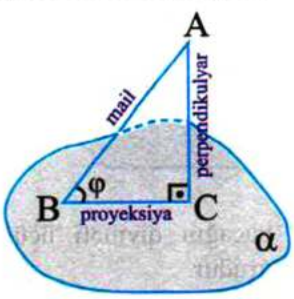
Bundan sonra "proyeksiya" dedikdə, "ortoqonal" proyeksiya başa düşüləcək.

Aşağıdakı şəkillərdə AB parçasının müxtəlif vəziyyətlərinin proyeksiyaları göstərilib.



7. Perpendikulyar və mail

Şəkildə A nöqtəsindən α müstəvisinə AC perpendikulyarı və AB maili çəkilmişdir.



AC parçasına A nöqtəsindən a müstəvisinə çəkilmiş perpendikulyar deyilir. C nöqtəsinə perpendikulyarın müstəvisi üzərindəki oturacağı deyilir.

A nöqtəsi ilə α müstəvisinin qalan nöqtələrini birləşdirən parçalara maillər deyilir. Mailin müstəvi üzərindəki uc nöqtəsinə (B) onun oturacağı deyilir.

Mailin oturacağı ilə perpendikulyarın oturacağını birləşdirən parçaya mailin proyeksiyası (BC) deyilir.

Tərif: Düz xətlə onun müstəvi arasındakı proyeksiyası arasındakı bucağa düz xətlə müstəvi arasındakı bucaq deyilir.

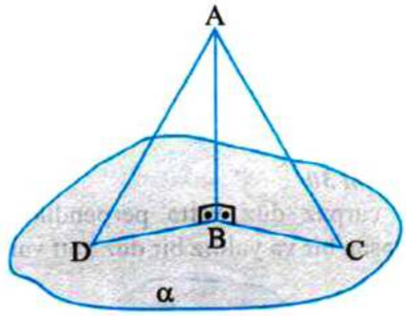
φ bucağı, AB düz xətti ilə α müstəvisi arasındakı bucaqdır.

Teorem 25

(Maillərin bərabərliyi)

Bir nöqtədən müstəviyə çəkilmiş maillər bərabərdirsə (AD=AC), onların proyeksiyaları da bərabərdir (BD=BC).

Tərsinə, bir nöqtədən müstəviyə çəkilmiş maillərin proyeksiyaları bərabərdirsə, onların özləri də bərabərdir.



Teorem 26

(Maillərin müqayisəsi)

Bir nöqtədən müstəviyə iki mail çəkilərsə:

1. böyük mailin proyeksiyası böyükdür;
2. proyeksiyası böyük olan mail böyükdür.

Teorem 27

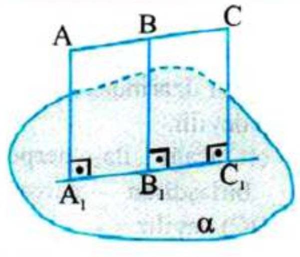
(Düz xətlə müstəvi arasındakı bucağın xassəsi)

Düz xətlə müstəvi arasındakı bucaq bu düz xəttin müstəvi üzərindəki digər düz xətlərlə əmələ gətirdiyi bucaqların heç birindən böyük deyildir.

Teorem 28

(Paralel düz xətlər arasındakı məsafə)

Paralel düz xətt və müstəvi arasındakı məsafə düz xəttin ixtiyari nöqtəsindən bu müstəviyə çəkilmiş perpendikulyarın uzunluğuna bərabərdir.

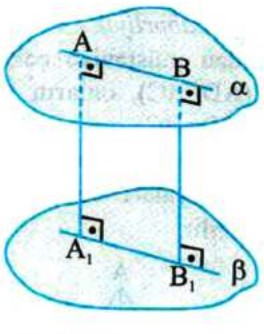


$$AC \parallel \alpha \Rightarrow AA_1 = BB_1 = CC_1$$

Teorem 29

(İki paralel müstəvi arasındakı məsafə)

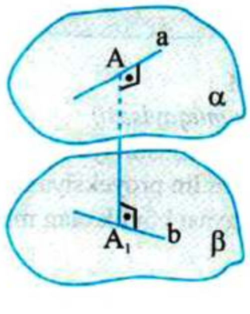
İki paralel müstəvi arasındakı məsafə bu müstəvilərdən birinin ixtiyari nöqtəsindən o birinə çəkilmiş perpendikulyarın uzunluğuna bərabərdir.



$$\alpha \parallel \beta \Rightarrow AA_1 = BB_1$$

Teorem 30

İki çarpaz düz xəttə perpendikulyar və onları kəsən bir və yalnız bir düz xətt vardır.

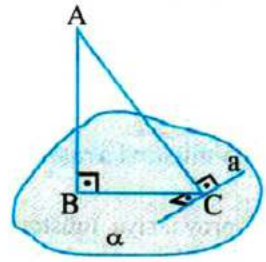


8. Üç perpendikulyar teoremi

Teorem 31

Müstəvi üzərində olan düz xətt, mailin bu müstəvi üzərindəki proyeksiyasına perpendikulyardırsa, onda mailin özünə də perpendikulyardır.

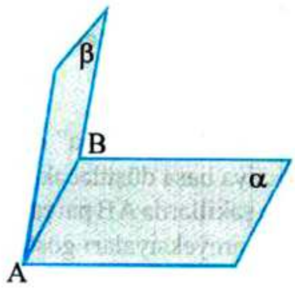
Tərsinə, müstəvi üzərində olan düz xətt mailə perpendikulyardırsa, mailin bu müstəvi üzərindəki proyeksiyasına da perpendikulyardır.



9. İkiüzlü bucaqlar

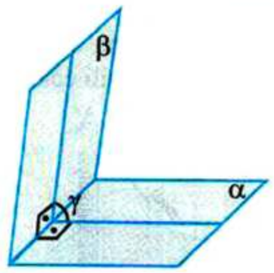
Tərif: Sərhədləri eyni olan iki yarımmüstəvidən ibarət fiqura **ikiüzlü bucaq** deyilir.

Yarımmüstəvilərə ikiüzlü bucağın üzləri (α və β), onların ortaq sərhəddinə (AB) isə ikiüzlü bucağın tili deyilir.



Tərif: İkiüzlü bucağın tilinə perpendikulyar müstəvi ilə kəsişməsindən alınan müstəvi bucağa ikiüzlü bucağın **xətti bucağı** deyilir.

Tərif: İkiüzlü bucağın xətti bucağının qiymətinə (γ) **ikiüzlü bucağın qiyməti** deyilir.



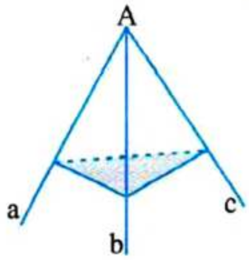
İkiüzlü bucağın qiyməti üçün aşağıdakı münasibət doğrudur.

$$0^0 \le \varphi \le 180^0$$

10. Üçüzlü və çoxüzlü bucaqlar

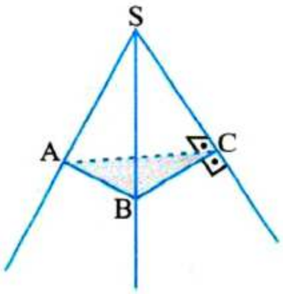
Üçüzlü bucaq

Tərif: Ortaq A təpəsi olan və bir müstəvi üzərində olmayan (ab), (bc) və (ca) müstəvi bucaqlarının əmələ gətirdiyi fiqura üçüzlü bucaq deyilir.



Teorem 32
(Üçüzlü bucağın əsas xassəsi)
Üçüzlü bucağın hər bir müstəvi bucağı onun qalan iki müstəvi bucağının cəmindən kiçikdir.

Teorem 33
(Müstəvi bucaqların cəmi)
Üçüzlü bucağın müstəvi bucaqlarının cəmi 360^0 - dən kiçikdir.



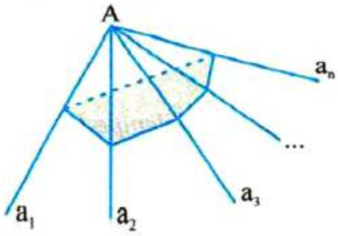
$\angle ASB=\gamma$, $\angle ASC=\alpha$, $\angle BSC=\beta$, $\angle ACB=c'$ işarələmələri aparaq.

Burada α, β, γ – üçüzlü bucağın müstəvi bucaqları; c' isə c tilindəki ikiüzlü bucaqdır. O zaman, aşağıdakı düstur doğrudur.

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos c'$$

Çoxüzlü bucaq

Tərif: Ortaq A təpəsi olan və bir müstəvi üzərində olmayan (a_1a_2), (a_2a_3), ..., (a_na_1) müstəvi bucaqlarının əmələ gətirdiyi fiqura çoxüzlü bucaq deyilir.



Teorem 34
(Çoxüzlü bucağın xassəsi)
Çoxüzlü bucağın hər bir müstəvi bucağı qalan müstəvi bucaqların cəmindən kiçikdir.

Teorem 35
(Müstəvi bucaqların cəmi)
Çoxüzlü bucağın bütün müstəvi bucaqlarının cəmi 360^0 -dən kiçikdir.

Çoxüzlülər, onların səthi və həcmi

1. *Prizma*
2. *Düzbucaqlı paralelepiped*
3. *Kub*
4. *Piramida*
5. *Düzgün tetraedr*
6. *Kəsik piramida*
7. *Düzgün çoxüzlülər*

S_{yan} – Yan səthin sahəsi
S_{tam} – Tam səthin sahəsi
S_{ot} – Oturacağın sahəsi
P_{ot} – Oturacağın perimetri
$S_{per.kəs}$ – Perpendikulyar kəsiyin sahəsi
$P_{per.kəs}$ – Perpendikulyar kəsiyin perimetri
l – Apofem
d – Diaqonal
V – Həcm

1. Prizma

Tərif: İki üzü bərabər və uyğun tərəfləri paralel çoxbucaqlı, qalan üzləri paraleloqram olan çoxüzlüyə prizma deyilir.

❖ Prizmanın oturacaqları n-bucaqlıdırsa, bu prizma n-bucaqlı prizma adlanır.

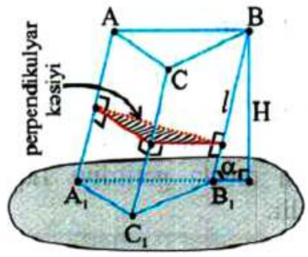
❖ Prizmanın bir üzünə aid olmayan iki təpə nöqtəsini birləşdirən parçaya prizmanın diaqonalı deyilir.

❖ Prizmanın bir yan üzü üzərində olmayan iki yan tilindən keçən müstəvi ilə kəsiyinə diaqonal kəsiyi deyilir.

n-bucaqlı prizmada

- Təpə nöqtələrinin sayı ⇒ 2n
- Tillərinin sayı ⇒ 3n
- Üzlərinin sayı ⇒ n+2
- Diaqonallarının sayı ⇒ n·(n-3)
- Diaqonal kəsiklərinin sayı ⇒ $\frac{n(n-3)}{2}$

Maili prizma



❖ Mail prizmanın yan tili oturacaq müstəvisi ilə α bucağı əmələ gətirirsə, aşağıdakı düstur doğrudur.

$$H = l \cdot \sin\alpha$$

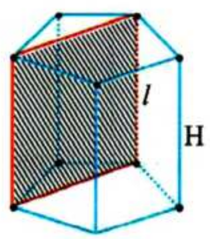
❖ Mail prizmanın yan üzləri paraleloqramdır.

❖ Mail prizmanın yan tilinə perpendikuyar müstəvi ilə kəsiyinə perpendikulyar kəsiyi deyilir.

$$S_{yan} = P_{per.kəs} \cdot l$$
$$S_{tam} = S_{yan} + 2 \cdot S_{ot}$$
$$V = S_{ot} \cdot H \text{ və ya } V = S_{per.kəs} \cdot l$$

Düz prizma

Tərif: Yan tili oturacaq müstəvisinə perpendikulyar olan prizmaya düz prizma deyilir.



❖ Düz prizmanın yan tili hündürlüyünə bərabərdir.

$$l = H$$

❖ Düz prizmanın yan üzləri düzbucaqlıdır

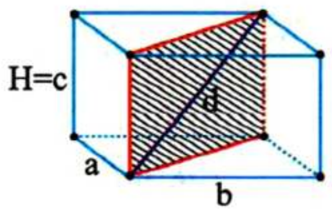
$$S_{yan} = P_{ot} \cdot H$$
$$S_{tam} = S_{yan} + 2 \cdot S_{ot}$$
$$V = S_{ot} \cdot H$$

Tərif: Oturacağı düzgün çoxbucaqlı olan prizmaya düzgün prizma deyilir.

2. Düzbucaqlı paralelepiped

Tərif: Oturacağı paraleloqram olan prizmaya paralelepiped deyilir.

Tərif: Oturacağı düzbucaqlı olan düz paralelepipedə düzbucaqlı paralelepiped deyilir.



- Təpə nöqtələrinin sayı ⇒ 8
- Tillərinin sayı ⇒ 12
- Üzlərinin sayı ⇒ 6
- Diaqonallarının sayı ⇒ 4
- Diaqonal kəsiklərinin sayı ⇒ 2

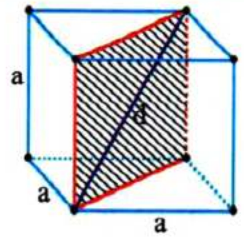
$$S_{yan}=2c\cdot(a+b)$$
$$S_{tam}=2(ab+bc+ac)$$
$$V=a\cdot b\cdot c$$
$$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Düzbucaqlı paralelepipedin xaricinə çəkilmiş kürənin radiusu paralelepipedin diaqonalının yarısına bərabərdir.

$$R=\frac{d}{2}$$

3. Kub

Tərif: Bütün tilləri bərabər olan düzbucaqlı paralelepipedə kub deyilir.



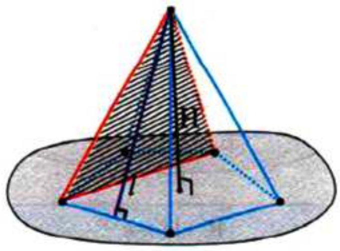
$$S_{yan}=4a^2$$
$$S_{tam}=6a^2$$
$$V=a^3$$
$$d=a\sqrt{3}$$
$$S_{diaq.kəs}=a^2\sqrt{2}$$

Kubun daxilinə və xaricinə çəkilmiş kürələrin radiusları aşağıdakı düsturlarla tapılır.

$$r=\frac{a}{2}$$
$$R=\frac{d}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

4. Piramida

Tərif: Bir üzü çoxbucaqlı və qalan üzləri ortaq təpəli üçbucaqlar olan çoxüzlüyə piramida deyilir.



Tərif: Piramidanın bir yan üzü üzərində olmayan iki yan tilindən keçən müstəvi ilə kəsiyinə diaqonal kəsiyi deyilir.

n-bucaqlı piramidada

- Təpə nöqtələrinin sayı ⇒ n+1
- Tillərinin sayı ⇒ 2n
- Üzlərinin sayı ⇒ n+1
- Diaqonal kəsiklərinin sayı ⇒ $\frac{n(n-3)}{2}$

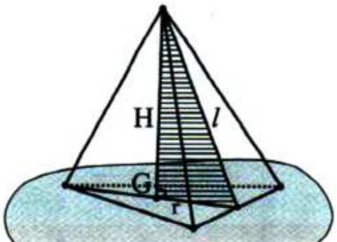
$$S_{yan} = \frac{1}{2} P_{ot} \cdot l$$

$$S_{tam} = S_{yan} + S_{ot}$$

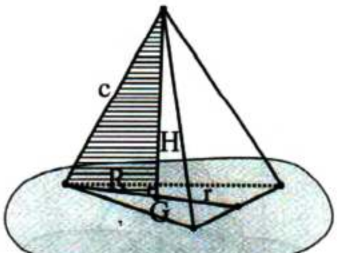
$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ot} \cdot H$$

Tərif: Oturacağı düzgün çoxbucaqlı olub hündürlüyünün oturacağı çoxbucaqlının mərkəzi ilə üst-üstə düşən piramidaya düzgün piramida deyilir.

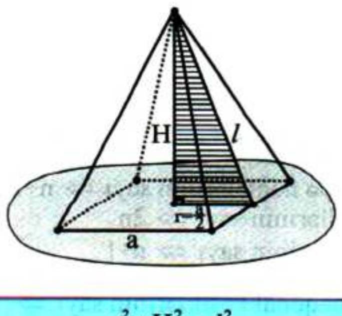
Düzgün üçbucaqlı və dördbucaqlı piramida üçün bəzi münasibətlər



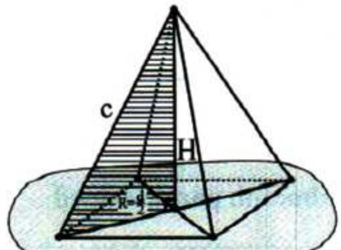
$$r^2+H^2=l^2$$



$$R^2+H^2=c^2$$



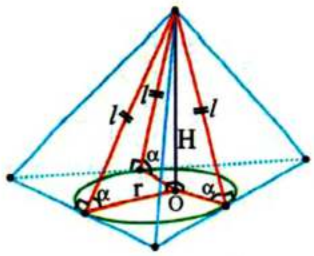
$$r^2+H^2=l^2$$



$$R^2+H^2=c^2$$

QEYD

Yan üzlərin hündürlükləri bərabər olarsa, onda



$$r^2+H^2=l^2$$

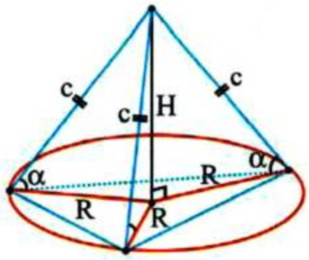
I. Yan üzlər oturacaq müstəvisi ilə eyni bucaq əmələ gətirir.

II. Hündürlük oturacağın daxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzinə düşür.

III. $S_{ot}=S_{yan} \cdot \cos\alpha$

QEYD

Piramidanın yan tilləri bərabər olarsa,



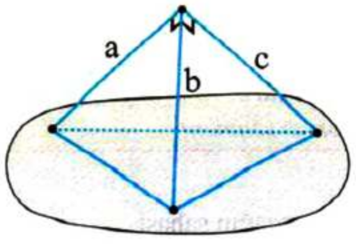
$$R^2+H^2=c^2$$

I. Yan tillər oturacaq müstəvisi ilə eyni bucaq əmələ gətirir.

II. Hündürlük oturacağın xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzinə düşür.

QEYD

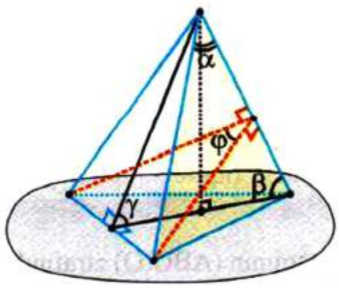
Üçbucaqlı piramidanın yan tilləri perpendikulyar olarsa,



$$S_{yan} = \frac{1}{2}(ab + bc + ac)$$

$$V = \frac{abc}{6}$$

QEYD

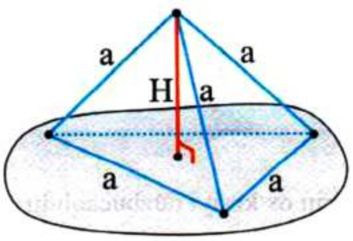


- Təpədəki müstəvi bucaq – α
- Yan til ilə oturacaq müstəvisi arasındakı bucaq – β
- Oturacaqdakı ikiüzlü bucaq – γ
- Yan üzlər arasındakı ikiüzlü bucaq – φ

5. Düzgün tetraedr

Tərif: Bütün tilləri bərabər olan üçbucaqlı piramidaya düzgün tetraedr deyilir.

❖ Düzgün tetraedrin bütün üzləri bərabərtərəfli üçbucaqlardır.



$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$S_{ot} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

$$S_{yan} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

$$S_{tam} = a^2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

❖ Düzgün tetraedrin daxilinə və xaricinə çəkilmiş kürələrin radiusları aşağıdakı düsturlarla tapılır.

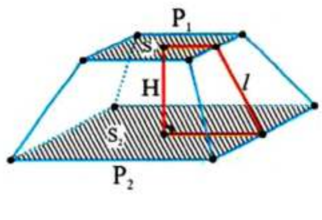
$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

$$R = 3 \cdot r$$

6. Kəsik piramida

Tərif: Piramidanın oturacağı ilə oturacağa paralel keçirilmiş kəsən müstəvi arasında qalan hissəsinə kəsik piramida deyilir.



$$S_{yan} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \cdot \ell$$

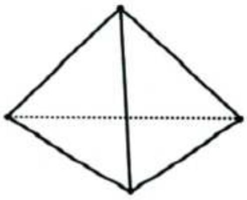
$$S_{tam} = S_{yan} + S_1 + S_2$$

$$V = \frac{1}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2\right) \cdot H$$

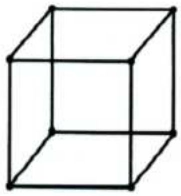
❖ Kəsik piramidanın yan üzləri və diaqonal kəsiyi trapesiyadır.

7. Düzgün çoxüzlülər

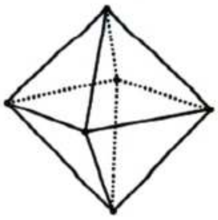
Tetraedr



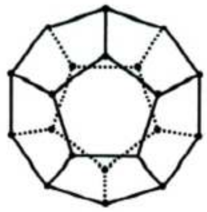
Kub



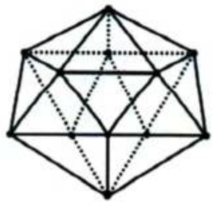
Oktaedr



Dodekaedr



İkosaedr



Çoxülünün növü	Üzlərin sayı (**m**) və forması	Təpə nöqtəsinin sayı (**n**)	Til sayı (**k**)
tetraedr	4 - üçbucaq	4	6
kub	6 - kvadrat	8	12
oktaedr	8 - üçbucaq	6	12
dodekaedr	12 - beşbucaqlı	20	30
ikosaedr	20 - üçbucaq	12	30

Eyler düsturu

$$n - k + m = 2$$

Fırlanma cisimləri , onların səthi və həcmi

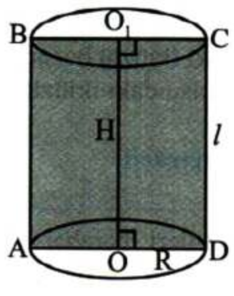
1. Silindr
2. Konus
3. Kəsik konus
4. Sfera və kürə
5. Sektor və seqment

S_{ot} – Oturacağın sahəsi
S_{yan} – Yan səthinin sahəsi
S_{tam} – Tam səthinin sahəsi
$S_{o.k}$ – Ox kəsiyinin sahəsi
S_{sek} – Sektorun sahəsi
S_{seq} – Seqmentin sahəsi
V – Həcm
V_{sek} – Sektorun həcmi
V_{seq} – Seqmentin həcmi

1. Silindr

Tərif: Düzbucaqlının bir tərəfi ətrafında fırlanmasından alınan fiqura silindr deyilir.

Düzbucaqlının (ABO_1O) ətrafında fırlandığı tərəfi (OO_1) silindrin hündürlüyü, digər tərəfi isə (AO) silindrin radiusudur.

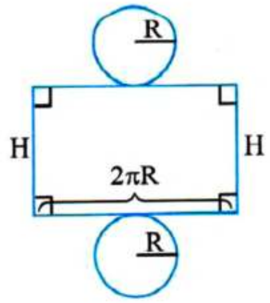


$$S_{ot}=\pi R^2$$
$$S_{yan}=2\pi RH$$
$$S_{tam}=S_{yan}+2S_{ot}$$
$$S_{o.k}=2RH$$
$$V=\pi R^2H$$

❖ Silindrin ox kəsiyi düzbucaqlıdır (ABCD).

Tərif: Ox kəsiyi kvadrat olan (H=2R) silindrə bərabərtərəfli silindr deyilir.

❖ Silindrin açılışı aşağıdakı kimidir.

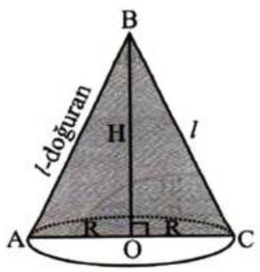


2. Konus

Tərif: Düzbucaqlı üçbucağın katetlərindən birinin ətrafında fırlanmasından alınan fiqura konus deyilir.

Düzbucaqlı üçbucağın (ABO) ətrafında fırlandığı kateti (BO) konusun hündürlüyü, digər kateti isə (AO) konusun radiusudur.

Düzbucaqlı üçbucağın hipotenuzu (AB) konusun doğuranı adlanır.

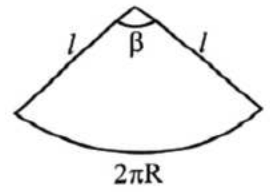


$$S_{ot}=\pi R^2$$
$$S_{yan}=\pi R\ell$$
$$S_{tam}=S_{yan}+S_{ot}$$
$$S_{o.k}=RH$$
$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$$

❖ Konusun ox kəsiyi (ABC) bərabəryanlı üçbucaqdır.

Tərif: Ox kəsiyi bərabərtərəfli üçbucaq olan (l=2R) konusa bərabərtərəfli konus deyilir.

❖ Konusun açılışı aşağıdakı kimidir.

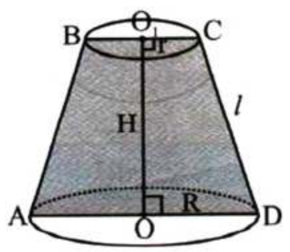


Konusun yan səthinin açılış bucağı (β) aşağıdakı düsturla tapılır.

$$\beta=\frac{R\cdot 360^0}{l}$$

3. Kəsik konus

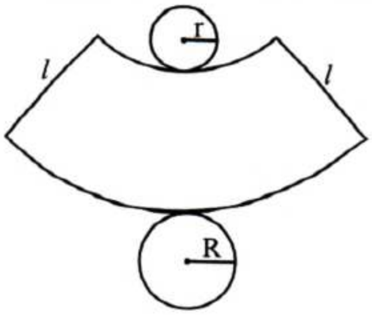
Tərif: Düzbucaqlı trapesiyanın kiçik yan tərəfi ətrafında fırlanmasından alınan fiqura kəsik konus deyilir.



$$S_{yan}=\pi(R+r)l$$
$$S_{tam}=\pi(R+r)\,l+\pi(R^2+r^2)$$
$$S_{o.k}=(R+r)H$$
$$V=\frac{1}{3}\pi\left(R^2+R\cdot r+r^2\right)\cdot H$$

❖ Kəsik konusun ox kəsiyi (ABCD) bərabəryanlı trapesiyadır.

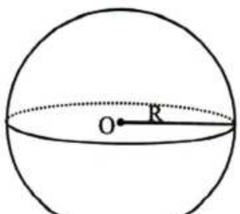
❖ Kəsik konusun açılışı aşağıdakı kimidir.



4. Sfera və kürə

Tərif: Fəzanın verilmiş nöqtəsindən eyni məsafədə yerləşən nöqtələr çoxluğunun əmələ gətirdiyi fiqura sfera deyilir. Bu nöqtəyə sferanın mərkəzi, məsafəyə isə sferanın radiusu deyilir.

Sfera yarımçevrənin diametri ətrafında fırlanmasından alınan fiqurdur.



$$S=4\pi R^2$$

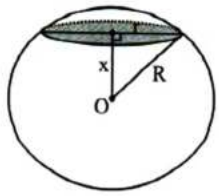
Tərif: Fəzanın verilmiş nöqtəsindən məsafələri verilmiş məsafədən böyük olmayan bütün nötələri çoxluğuna kürə deyilir. Verilmiş nöqtəyə kürənin mərkəzi, məsafəyə isə kürənin radiusu deyilir.

Kürə sfera ilə hüdüdlanmış cisimdir.

Yarımdairənin diametri ətrafında fırlanmasından kürə alınır.

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

Kürənin müstəvi ilə kəsiyi dairədir. Bu dairənin mərkəzi kürənin mərkəzindən müstəviyə endirilmiş perpendikulyarın oturacağı ilə üst-üstə düşür.

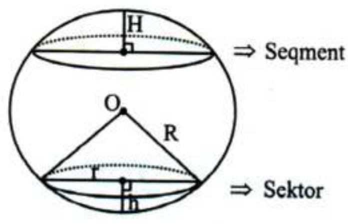


$$R^2=x^2+r^2$$
$$S_{kəsik}=\pi r^2$$

5. Sektor və seqment

Tərif: Dairə seqmentinin, onun vətərinə perpendikulyar olan diametr ətrafında fırlanmasından alınan cismə kürə seqmenti deyilir.

Tərif: Dairə sektorunun radiuslardan birindən keçən ox ətrafında fırlanmasından alınan cismə kürə sektoru deyilir.



$$S_{seq}=2\pi RH$$
$$V_{seq}=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$$
$$S_{sek}=\pi Rr+2\pi Rh \Rightarrow S_{kon}+S_{seq}$$
$$V_{sek}=\frac{2}{3}\pi R^2 H$$